Diskretne strukture VSP: 1. računski izpit

20. januar 2021

Čas pisanja je 60 minut. Dovoljena je uporaba 2 listov A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.
Vsako nalogo rešuj na ločeno stran. Na vsako stran se zgoraj podpiši, zapiši svojo vpisno številko in navedi številko naloge, ki jo rešuješ. Naloge skeniraj po vrsti. Hvala!

Vse odgovore dobro utemelji!

---

1. Z uporabo matematične indukcije utemelji, da za vsako naravno število $n > 0$ velja:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Baza indukcije:
Vstavimo $n = 1$ in dobimo

$L = 1^2 = 1$,
$D = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$.

Ker je $L = D$, baza velja.

Indukcijski korak:
Naj bo n poljubno naravno število.
Predpostavimo

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

in dokazujemo

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Uporabimo indukcijsko predpostavko in izračunamo

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && (1)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} && (2)\\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} && (3)\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}. && (4)
\end{aligned}$$

Izračunamo še

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}. \qquad (5)$$

- Baza: 5 točk.
- Indukcijski korak:
  - za zapis indukcijske predpostavke dobite 5 točk,
  - za zapis enakosti, ki jo je potrebno dokazati 5 točk,
  - za vrstico (1) 5 točk,
  - za vrstico (4) 5 točk (točke ste dobili tudi, če ste v kakršnikoli drugi obliki zapisali levo stran enakosti, ki jo dokazujemo, iz katere je bilo razvidno, da je enaka desni strani iste enakosti),
  - za vrstico (5) 5 točk (točke ste dobili tudi, če ste v kakršnikoli drugi obliki zapisali desno stran enakosti, ki jo dokazujemo, iz katere je bilo razvidno, da je enaka levi strani iste enakosti).

---

2. Naj bodo A, B in C poljubne množice. Ali velja enakost

$$((B \cap A) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A) \ = \ B \cap (A \cup C)?$$

Kaj pa vsebovanost

$$((B \cap A) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A) \ \subseteq \ B \cap (A \cup C)?$$

Veljavnost utemelji z uporabo osnovnih enakosti z množicami ali kako drugače. Neveljavnost utemelji s protiprimerom.

Enakost ne velja.
Da to dokažemo, moramo zapisati protiprimer (najti moramo take množice A, B in C, za katere leva in desna stran podane enakosti nista enaki).
Vzemimo $A = B = C = \{1\}$.
Preverimo, da leva in desna stran podane enakosti pri taki izbiri množic A, B in C res nista enaki:
$((B \cap A) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A) = ((\{1\} \cap \{1\}) \setminus \{1\}) \cup ((\{1\} \cap \{1\}) \setminus \{1\}) = (\{1\} \setminus \{1\}) \cup (\{1\} \setminus \{1\}) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$,
$B \cap (A \cup C) = \{1\} \cap (\{1\} \cup \{1\}) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$.

Vsebovanost pa velja.
To lahko dokažemo na več različnih načinov. Zapišimo enega izmed njih (točke ste dobili tudi, če ste nalogo pravilno rešili na kakšen drug način).
Naj bo $x \in ((B \cap A) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A)$. Pokazati moramo, da potem velja tudi $x \in B \cap (A \cup C)$.
Iz $x \in ((B \cap A) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A)$ sledi, da je $x \in ((B \cap A) \setminus C)$ ali $x \in ((B \cap C) \setminus A)$.
Obravnavamo ločena primera:

(a) $x \in ((B \cap A) \setminus C)$
$x \in B \wedge x \in A \wedge x \notin C$
$x \in B \wedge x \in A \cup C$, saj $x \in A$
$x \in B \cap (A \cup C)$,

(a) $x \in ((B \cap C) \setminus A)$
$x \in B \wedge x \in C \wedge x \notin A$
$x \in B \wedge x \in A \cup C$, saj $x \in C$
$x \in B \cap (A \cup C)$.

V obeh primerih dobimo $x \in B \cap (A \cup C)$, zato vsebovanost velja.

- Protiprimer: 15 točk
  - 5 točk ste dobili za izbiro ustreznih množic A, B in C,
  - 5 točk za pravilen izračun leve strani enakosti ob uporabi izbranih množic A, B in C,
  - 5 točk za pravilen izračun desne strani enakosti ob uporabi izbranih množic A, B in C.
- Dokaz vsebovanosti: 20 točk
  - za sklep, da iz $x \in ((B \cap A) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A)$ sledi, da je $x \in ((B \cap A) \setminus C)$ ali $x \in ((B \cap C) \setminus A)$, ste dobili 4 točke,
  - za vsak pravilno obravnavan primer po 8 točk.

---

3. Na voljo imamo večjo količino znamk A (za €0.55) in znamk C (za €0.35). Z njimi želimo plačati €7.85 poštnine.

   (a) Recimo, da smo za frankiranje paketa porabili x znamk A ter y znamk C. Zapiši linearno diofantsko enačbo, ki pove, da smo s temi znamkami plačali €7.85 poštnine.

   (b) Poišči splošno rešitev te linearne diofantske enačbe.

   (c) Na koliko načinov lahko z znamkami tipov A ter C plačamo €7.85 poštnine? Koliko znamk enega in koliko znamk drugega tipa potrebujemo?

3. Na voljo imamo večjo količino znamk A (za €0.55) in znamk C (za €0.35). Z njimi želimo plačati €7.85 poštnine.

   5 (a) Recimo, da smo za frankiranje paketa porabili x znamk A ter y znamk C. Zapiši linearno diofantsko enačbo, ki pove, da smo s temi znamkami plačali €7.85 poštnine.

   20 (b) Poišči splošno rešitev te linearne diofantske enačbe.

   10 (c) Na koliko načinov lahko z znamkami tipov A ter C plačamo €7.85 poštnine? Koliko znamk enega in koliko znamk drugega tipa potrebujemo?

5 (a) $0.55x + 0.35y = 7.85 \;/\cdot 100 \;\ldots\; 55x + 35y = 785 \;/:5 \;\ldots$

$\ldots\; \underline{11x + 7y = 157}.$

(b) Poiščimo $\gcd(11,7)$ z REA:

10
$$\begin{aligned}
11 &= 11\cdot 1 + 7\cdot 0 \\
7 &= 11\cdot 0 + 7\cdot 1 && 11:7 = 1 \text{ ost. } 4 \\
4 &= 11\cdot 1 + 7\cdot(-1) && 7:4 = 1 \text{ ost. } 3 \\
3 &= 11\cdot(-1) + 7\cdot 2 && 4:3 = 1 \text{ ost. } 1 \\
1 &= 11\cdot 2 + 7\cdot(-3) && 3:1 = 3 \text{ ost. } 0 \\
0 &= 11\cdot(-7) + 7\cdot 11
\end{aligned}$$

pomnožimo z 157

pomnožimo s k

$$\begin{aligned}
11\cdot 314 + 7\cdot(-471) &= 157 \\
11\cdot(-7k) + 7\cdot 11k &= 0
\end{aligned} \quad 5$$

seštejemo

$$11\cdot\underbrace{(314-7k)}_{x_k} + 7\cdot\underbrace{(11k-471)}_{y_k} = 157$$

Splošna rešitev je torej $\underline{(x_k, y_k) = (314-7k,\ 11k-471),\ k\in\mathbb{Z}}$. 5

(c) Smiselne rešitve so tiste, za katere je $x_k \geq 0$ in $y_k \geq 0$.

5
Torej: $314 - 7k \geq 0 \;\ldots\; 7k \leq 314 \;\ldots\; k \leq \frac{314}{7} \doteq 44.8\ldots$, tj. $k \leq 44$ (saj $k\in\mathbb{Z}$)

in: $11k - 471 \geq 0 \;\ldots\; 11k \geq 471 \;\ldots\; k \geq \frac{471}{11} \doteq 42.8\ldots$, tj. $k \geq 43$ (saj $k\in\mathbb{Z}$).

5
Zato $k=43$ ali $k=44$ in poštnino lahko plačamo na __2 načina__, ki sta:

$k=43$: $(x_{43}, y_{43}) = (13, 2)$, __13 znamk A in 2 znamki C__,

$k=44$: $(x_{44}, y_{44}) = (6, 13)$, __6 znamk A in 13 znamk C__.