1. kolokvij iz Diskretnih struktur
Ljubljana, 20.11.2009

1. V vasi Žogobrc živijo sami navdušeni športniki. Nekega dne je v vas prišel novinar in tri mimoidoče vprašal, če so se uvrstili v državno nogometno reprezentanco.

   A: Če jaz nisem v reprezentanci, v njej tudi ni B.

   B: Vsi trije smo v reprezentanci.

   C: Poleg mene je v reprezentanci še vsaj eden od A in B.

   (a) Kdo med njimi je zagotovo reprezentant, če veš, da reprezentanti vedno govorijo resnico, ostali pa zaradi nevoščljivosti vedno lažejo?

   (b) Novinar je izvedel, da je med njegovimi sogovorniki sodo mnogo reprezentantov. Ali mu lahko pomagas ugotoviti kdo je v reprezentanci in kdo ne?

2. Ali je naslednji sklep pravilen?

$$p \wedge q \Rightarrow r, \;\; q \vee r, \;\; \neg p \wedge q \Rightarrow s \wedge r \;\; \models r$$

   Poišči protiprimer oz. dokaži s pomočjo pravil sklepanja.

3. V Oddaljeni deželi sta Zgornja in Spodnja vas.

   (a) Zapiši izjavo

      A: "Janez ima prijatelja v Zgornji vasi."

      s pomočjo predikatne formule. Določi področje pogovora in predikate.

   (b) Zapiši negacijo izjave A kot izjavo in kot predikatno formulo.

   (c) Zapiši izjave s pomočjo predikatnih formul v Prenexni normalni obliki.

      B: "Nekdo iz Spodnje vasi je prijatelj z vsemi iz Zgornje vasi."

      C: "Vsakdo iz Spodnje vasi je prijatelj z nekom iz Zgornje vasi."

      D: "Če je kdo iz Spodnje prijatelj z vsemi iz Zgornje vasi, potem imajo vsi iz Spodnje vasi prijatelja v Zgornji vasi."

4. Pokaži, da za poljubne množice A, B in C velja

$$(A + B) \setminus C \subseteq B \setminus (A + C) \cup A \setminus (B \cup C).$$

   Naj bosta zdaj A in B disjunktni. Pokaži, da velja enakost

$$(A + B) \setminus C = B \setminus (A + C) \cup A \setminus (B \cup C).$$

Odgovore dobro utemelji!

Čas reševanja je 90 minut. Vse naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista z obrazci. Rezultati bodo dostopni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

1. kolokvij iz Diskretnih struktur
(Ljubljana, 24. 11. 2010)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega ali dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na strani `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. (a) Katere logične vrednosti ohranjata izjavna veznika implikacija in ekskluzivna disjunkcija; $\Rightarrow$ in $\veebar$?

   (b) Izrazi konjunkcijo $p \wedge q$ samo z uporabo zgornjih dveh veznikov $\Rightarrow$ in $\veebar$.

   (c) Ali je $\{\Rightarrow, \veebar\}$ poln nabor izjavnih veznikov?

2. Ali je pravilen naslednji sklep

$$r \vee \neg t \Rightarrow p \wedge s, p \vee u, (r \wedge t) \vee u \;\; \models \;\; \neg p \Rightarrow u?$$

   Ali ostane sklep pravilen tudi, če odstranimo predpostavko $p \vee u$?

3. Ugotovi, ali so naslednji izjavni izrazi med seboj enakovredni:

   (a) $\big(\forall x \neg P(x) \Rightarrow \neg \exists y R(y)\big) \Rightarrow \exists x P(x)$ in $\exists x\, (P(x) \wedge R(x))$,

   (b) $\big(\forall x \neg P(x) \Rightarrow \neg \exists y R(y)\big) \Rightarrow \exists x P(x)$ in $\exists x\, (P(x) \vee R(x))$.

4. Naj bodo A, B in C poljubne množice. Ali velja enakost

$$(B \setminus C) \cup (A \cap C) \setminus B = (A \cup B) \cap (C \cup B)?$$

   Kaj pa vsebovanost

$$(B \setminus C) \cup (A \cap C) \setminus B \subseteq (A \cup B) \cap (C \cup B)?$$

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur
(Ljubljana, 30. 11. 2011)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega ali dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na strani `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Dokaži veljavnost naslednjega sklepa:

$$\neg t \lor s, q \Rightarrow t, r \lor \neg s \Rightarrow \neg p \quad \models \quad p \land q \Rightarrow \neg r \land t.$$

2. Katere izjavne formule so paroma enakovredne in katere ne? Natančno utemelji!

   (a) $\forall y \exists x (P(x) \lor \neg Q(y))$

   (b) $\forall y (\exists x \neg P(x) \lor Q(y))$

   (c) $\exists x (P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))$

   (d) $\exists y (P(y) \lor \forall x \neg Q(x))$

3. Spodnji enakosti dokaži ali pa ju ovrzi, tako da poiščeš protiprimer.

   (a) $(A + B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B)^c$

   (b) $A \cap B \cap C = (A \cap B) + ((A \cup B) \setminus C)$

4. V družini množic definiramo dvomestno operacijo $\lhd$ s predpisom

$$A \lhd B := A \cup B^c.$$

   (a) Poenostavi izraza:

$$((A \lhd B) \cap A) \lhd B \;\text{ in }\; ((((A \lhd B) \cap A) \lhd B) \cap A) \lhd B.$$

   (b) Izračunaj $((A \lhd B) \lhd C) \lhd A$.

   (c) Odloči, pod katerimi pogoji velja enakost $A \lhd B = B \lhd A$.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur VSŠ
(Ljubljana, 26. 11. 2012)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Poišči tak izjavni izraz X, odvisen le od p, r in s, da bo izraz

$$\neg p \wedge (X \Rightarrow (r \vee s)) \Leftrightarrow ((r \wedge s) \veebar X)$$

protislovje.

2. Če je spodnji sklep pravilen, zapiši njegov dokaz.

$$p \wedge q \Rightarrow \neg t\,,\ s \vee t\,,\ q \wedge r \quad \vDash \quad p \Rightarrow r \wedge s$$

Preveri še, da je sklep napačen, če predpostavko $q \wedge r$ zamenjamo s q.

3. Ali sta formuli

$$\neg\exists x(\forall y \neg Q(x,y) \wedge P(x)) \quad \text{in} \quad \exists y \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x,y))$$

enakovredni? Če sta, to pokaži, sicer pa poišči protiprimer.

4. Naj za množici C in D velja zveza $C \subseteq D$. Katere od naslednjih vsebovanosti veljajo pri poljubnih množicah A in B? Pokaži oziroma poišči ustrezne protiprimere.

$$A \cap C \subseteq A \cap D, \qquad A + C \subseteq A + D, \qquad A \cup (B \cap C) \subseteq A \cup (B \cap D),$$

$$(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \cap B) \setminus D, \qquad A \setminus (B + C) \subseteq A \setminus (B + D)$$

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur VSŠ
(Ljubljana, 5. december 2013)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Izjavni izraz $I = I(X)$

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (X \Rightarrow (p \Leftrightarrow r))$$

vsebuje neznan izjavni izraz X.

(a) Poišči vsaj tri takšne izjavne izraze X, za katere bo I tavtologija.

(b) Ali lahko poiščeš izraz X, za katerega bo I protislovje? Utemelji.

2. Ali je kateri izmed spodnjih sklepov pravilen?

$$p \vee (q \wedge r), \quad \neg s \Rightarrow (p \Rightarrow t), \quad p \Leftrightarrow r \;\models\; \neg t \Rightarrow s$$
$$p \vee (q \wedge r), \quad \neg s \Rightarrow (p \Rightarrow t), \quad p \Leftrightarrow r \;\models\; t \Rightarrow s$$

3. Pokaži, da je unija množic

$$A \setminus B,\ B \cap C^c \cap D^c,\ C \setminus D,\ D \setminus (A \cap C) \text{ in } A \cap B \cap C \cap D$$

enaka množici $A \cup B \cup C \cup D$. Pokaži tudi, da so omenjene množice paroma disjunktne, če je $A \cap (C + D) = \emptyset$.

4. Na množici $A = \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \underline{\vee}\}$ definiramo relacijo R s predpisom

$$aRb \text{ ntk. } a \text{ ima v pravilnostni tabeli kvečjemu toliko enic kot } b.$$

(a) Dokaži, da je relacija R refleksivna in tranzitivna.

(b) Nariši graf relacije R^2 in določi R^+.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur VSŠ
(Ljubljana, 27. november 2014)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Ali je sklep

$$(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s), \quad s \vee \neg r \wedge (\neg q \Rightarrow t) \quad \models \quad \neg s \Rightarrow (\neg p \vee t)$$

pravilen? Kaj pa sklep

$$(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s), \quad s \vee \neg r \wedge (\neg q \Rightarrow t) \quad \models \quad \neg s \Rightarrow (p \vee t)$$

2. Fibonaccijevo zaporedje števil $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definiramo z začetnima členoma $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ in rekurzivno zvezo (ki je v veljavi za vse $n \geq 1$)

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

(a) Izračunaj prvih 10 členov Fibonaccijevega zaporedja.

(b) Z indukcijo pokaži, da so vsi členi a_{3k}, $k \geq 1$, soda števila.

(c) Z indukcijo pokaži, da je kvocient a_{k+1}/a_k za vse $k \geq 3$ strogo med 1 in 2.

3. Za vsakega od spodnjih štirih izrazov ugotovi, ali je splošno veljaven oz. tavtologija. Odgovore utemelji.

$$p \Rightarrow (p \wedge (p \vee q))$$
$$(p \veebar (q \Rightarrow r)) \wedge (r \Leftrightarrow p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$$
$$\forall x \exists y (P(x,y) \Rightarrow (P(x,y) \wedge (Q(x) \vee P(x,y))))$$
$$\forall x P(x) \wedge \forall x \neg Q(x)$$

4. Ali za poljubno trojico množic A, B, C veljata spodnji enakosti?

(a) $\big((A + B) \cap C\big) \cup \big((A \cap B) \setminus C\big) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

(b) $\big((A+B)\cap C\big)\cup\big((A\cap B)\setminus C\big) = \big(A\cap(B+C)\big)\cup\big(B\cap(A+C)\big)\cup\big(C\cap(A+B)\big)$

Za vsako posamezno možnost poišči utemeljitev enakost oziroma protiprimer.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur VSŠ
(Ljubljana, 8. 12. 2015)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na ***ucilnica.fri.uni-lj.si****.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Ali je sklep

$$r \vee s, \quad (q \vee s) \Rightarrow u \wedge p, \quad (q \vee p) \Rightarrow t \quad \models \quad r \vee t$$

pravilen? Kaj pa sklep

$$r \vee s, \quad (q \vee s) \Rightarrow u \wedge p, \quad (q \vee p) \Rightarrow t \quad \models \quad r$$

2. Pokaži, da množice $A \cap B \cap C$, $(A \cup C) \setminus B$ in $(B \cup C) \setminus A$ predstavljajo pokritje množice $(A + B) \cup C$. Ali so tudi razbitje?

3. Ali sta izjavni formuli

$$\forall x \neg \forall y (P(x, y) \vee Q(y))$$

in

$$\forall x (\exists y \neg P(x, y) \wedge \exists y \neg Q(y))$$

enakovredni? Odgovor utemelji.

4. Na množici $A = \{2, \ldots, 7\}$ definiramo relacijo R z opisom:

$$aRb \text{ natanko tedaj, ko je } a + b \text{ praštevilo.}$$

   (a) Narišite graf relacije R.
   (b) Ali je relacija simetrična, refleksivna oz. tranzitivna?
   (c) Narišite graf relacije R^2. Ali je refleksivna? Ali je ekvivalenčna?

Vse odgovore dobro utemelji!

1. kolokvij iz Diskretnih struktur VSŠ
(Ljubljana, 4. 12. 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Dobro preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na strežniku `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji! Veliko uspeha!

1. Pokaži, da za vsako naravno število n velja formula
$$\sum_{l=1}^{n} l^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Ali je naslednji sklep pravilen?
$$p \Leftrightarrow q,\ q \Rightarrow r,\ \neg p \vee (s \wedge t),\ s \Rightarrow u,\ \ \neg u \vee \neg r \ \models\ \neg p \wedge r.$$
Kaj pa, če zaključek sklepa spremenimo v $\neg p$?

3. Podani imamo formuli
$$\exists x \forall y\ (P(x,y) \Rightarrow (\exists y Q(y) \vee R(y))$$
in
$$\exists x \forall y\ (P(x,y) \Rightarrow (Q(y) \vee \exists y R(y)).$$
Ali sta formuli enakovredni?

4. Naj bodo A, B in C poljubne množice. Ali velja naslednja enakost
$$(A+B) \setminus C = (A \setminus C) + B\ ?$$
Kaj pa vsebovanost
$$(A+B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) + B\ ?$$
Za vsako posamezno trditev poišči dokaz oziroma protiprimer.

Vse odgovore dobro utemelji! Veliko uspeha!