Univerza v Ljubljani

Fakulteta za elektrotehniko
Fakulteta za računalništvo in informatiko

MATEMATIKA I

Gabrijel Tomšič

Bojan Orel

Neža Mramor Kosta

Ljubljana, 2001

Kazalo

Predgovor

Ta delo je nastalo na osnovi predavanj iz predmeta **Matematika I**, ki že vrsto let potekajo na smeri elektrotehnika na Fakulteti za elektrotrotehniko in računalništvo Univerze v Ljubljani.

Matematika I je osnovni matematični predmet študija elektrotehnike in je v marsičem podoben takšnim predmetom na drugih tehničnih, pa tudi naravoslovnih študijih. Namen takšnih predmetov je predstaviti osnovne pojme matematične analize, ki jih bodo študenti nujno potrebovali pri svojem nadaljnem študiju. Pojme kot so števila, zaporedja, zvezne in odvedljive funkcije ter integral študenti večinoma že poznajo iz srednješolske matematike. Pri Matematiki I želimo te pojme po eni strani postaviti na trdnejše matematične temelje, po drugi strani pa razširiti in poglobiti njihovo razumevanje.

Glavni namen te knjige je pomagati študentom pri pripravah na izpite iz matematičnih predmetov. Upamo, da jim bo knjiga služila tudi ko bodo, že po opravljenem izpitu, morali svoje znanje uporabiti pri reševanju različnih problemov.

Eno osrednjih vprašanj, ki se zastavlja učiteljem osnovnih matematičnih predmetov je, s kolikšno matematično natančnostjo bodo posamezne pojme predstavili, koliko njihovih lastnosti bodo natančno dokazali in koliko le navedli, ali celo izpustili. Elektrotehnikom in nasploh tehnikom je matematika predvsem orodje, sami matematični pojmi so jim manj zanimivi. Zato se v same temelje matematične analize (na primer v natančno konstrukcijo množice realnih števil) tu nismo spustili, pa tudi nekatere dokaze, ki so za tehnike morda preveč zahtevni, smo izpustili. Bralec, ki bo pogrešal kakšen tak dokaz ali bolj temeljito definicijo, si lahko pomaga z bolj poglobljenimi matematičnimi učbeniki, na primer [8] in [6] ali celo vrsto tujih knjig. Seveda pa površnost pri pouku matematike še zdaleč ni sprejemljiva, in lahko hitro pripelje do napačnih predstav in nato do napačne uporabe pojmov in metod.

Upamo, da smo se preveliki površnosti v tej knjigi izognili. V drobnem tisku smo omenili nekatere pojme in izpeljali nekaj dokazov, ki jih večina študentov kasneje ne bo več potrebovala, so pa dovolj preprosti, zanimivi in koristni, da bodo bolj temeljitim bralcem všeč.

Matematike se ne moremo naučiti brez samostojnega reševanja nalog. Poleg rešenih primerov, ki so vključeni v tem učbeniku, bodo bralci za boljše razumevanje nujno potrebovali še kakšno zbirko nalog, na primer Jurčič B., Zbirka nalog iz Matematike I, ali pa katerokoli drugo iz cele vrste odličnih tujih in domačih zbirk, ki pokrivajo obravnavana poglavja.

Učbenik Matematika I je tretji v vrsti matematičnih učbenikov, ki so izšli pri založbi FER. Tudi zanj velja, da je nastal s skupnimi močmi in prispevki vseh, ki sodelujemo pri pouku matematike na tej fakulteti in se vsem za njihovo pomoč zahvaljujemo. Posebej smo dolžni zahvalo recenzentu doc. dr. Izidorju Hafnerju za njegove številne predloge in nasvete, ter asistentoma Darju Feldi in Gregorju Dolinarju, ki sta delo natančno in skrbno prebrala in popravila veliko napak in nerodnosti. Za vse napake, ki so še ostale, pa smo odgovorni avtorji. Za likovno opremo knjige se zahvaljujemo Milojki Žalik Huzjan, za potrpežljivost pa uredniku Založbe FER mag. Petru Šegi.

Gabrijel Tomšič
Bojan Orel
Neža Mramor Kosta

Ljubljana, december 1995

Poglavje 1

Množice in števila

1.1 Osnovni pojmi o množicah

1.1.1 Množice

Množica je zbirka objektov, ki jih imenujemo *elementi množice*. Če x pripada množici A pravimo, da je x element množice A, kar napišemo $x \in A$. Za objekt y, ki ne pripada množici A pravimo, da ni element množice A, kar napišemo $y \notin A$.

Množico lahko opredelimo tako, da naštejemo vse njene elemente, na primer:

$$A = \{1, 2, \sqrt{2}, 5, \pi\},$$

ali pa s pomočjo pravila, ki natanko določa elemente, ki ji pripadajo, na primer:

$$B = \{x;\ x \text{ je realno število, } x > 0\}.$$

Med množicami ima posebno mesto tista množica, ki nima nobenega elementa. Pravimo ji *prazna množica* in jo zapišemo s simbolom $\emptyset$. Tako je

$$\{x;\ 0 \cdot x = 1\} = \emptyset.$$

Množici A in B sta enaki natanko takrat, kadar imata iste elemente, kar zapišemo $A = B$. Na primer, množica vseh realnih števil je enaka množici

$$A = \{x;\ x \text{ je realno število, } 0 \cdot x = 0\}.$$

Kadar za dve množici A in B velja, da je vsak element množice A tudi element množice B pravimo, da je A *podmnožica* množice B, kar zapišemo $A \subseteq B$. Za vsako množico A veljata relaciji $A \subseteq A$ in $\emptyset \subseteq A$.

Kadar je $A = B$, veljata relaciji $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$. Če je $A \subseteq B$ in $A \neq B$ pravimo, da je množica A *prava* podmnožica množice B in to zapišemo $A \subset B$.

Z množicami lahko tudi računamo. Naštejmo osnovne operacije nad množicami, ki jih bomo uporabljali v nadaljevanju:

> *Unija* $A \cup B$ je množica, ki vsebuje vse elemente, ki so v množici A ali v množici B
> $$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ ali } x \in B\}.$$
>
> *Presek* $A \cap B$ je množica, ki vsebuje vse elemente, ki so v obeh množicah, v A in v B.
> $$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ in } x \in B\}.$$
>
> Če je $A \cap B = \emptyset$, pravimo, da sta množici A in B *disjunktni.*
>
> *Razlika* $A \setminus B$ dveh množic je množica, ki vsebuje vse elemente množice A, ki niso elementi množice B.
> $$A \setminus B = \{x;\ x \in A \text{ in } x \notin B\}.$$
>
> Razliki $A \setminus B$ pravimo tudi *komplement* množice B glede na množico A.
>
> O *komplementu* $\bar{A}$ govorimo takrat, kadar so vse množice, ki nas zanimajo, podmnožice neke vnaprej določene *univerzalne množice* U. Komplement $\bar{A}$ je v tem primeru razlika $U \setminus A$.
>
> *Premi (kartezični) produkt* $A \times B$ je množica, katere elementi so urejeni pari (x, y), kjer je prvi element v paru iz množice A, drugi pa iz množice B
> $$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ in } y \in B\}.$$

Primer 1.1.1. Dokažimo *de Morganova zakona*[1] :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

[1]Augustus de Morgan (1806–1871), angleški matematik. Ukvarjal se je predvsem z matematično logiko.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Za poljuben objekt a velja

$$\begin{aligned} a \in A \cap (B \cup C) &\iff a \in A \text{ in } a \in B \cup C \\ &\iff a \in A \text{ in } (a \in B \text{ ali } a \in C) \\ &\iff (a \in A \text{ in } a \in B) \text{ ali } (a \in A \text{ in } a \in C) \\ &\iff a \in A \cap B \text{ ali } a \in A \cap C \\ &\iff a \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Dokaz druge enakosti je podoben in ga prepuščamo bralcu. ■

Pri matematiki pogosto srečujemo množice, katerih elementi so števila. V glavnem bomo srečevali naslednje številske množice in njihove oznake:

Naravna števila	$\mathbb{N}$
Cela števila	$\mathbb{Z}$
Racionalna števila	$\mathbb{Q}$
Realna števila	$\mathbb{R}$
Kompleksna števila	$\mathbb{C}$.

1.1.2 Preslikave

Dani naj bosta množici A in B.

Definicija 1.1.1. *Preslikava* množice A v množico B ali *upodobitev* množice A v množici B je pravilo, ki vsakemu elementu $a \in A$ priredi točno določen element v množici B. Preslikave običajno označujemo z malimi latinskimi ali grškimi črkami, npr.:

$$f : A \to B.$$

Element množice B, ki ga preslikava f priredi elementu $a \in A$, je *slika* elementa a in ga zapišemo kot $f(a)$. Množico A imenujemo *definicijsko območje* preslikave f, množico

$$f(A) = \{f(a), a \in A\} \subseteq B$$

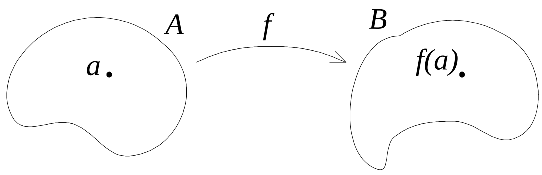
pa njeno *zaloga vrednosti*.

Primer 1.1.2. Navedimo nekaj preslikav:

1. Preslikavi $f : A \to B$, ki vsem elementom $a \in A$ priredi isti element $b \in B$ pravimo *konstantna preslikava*. Zaloga vrednosti konstantne preslikave je točka $\{b\} \subset B$.

2. Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki vsakemu naravnemu številu n priredi število $f(n) = 2n$, ima za zalogo vrednosti vsa soda naravna števila.

3. Pogosto bomo imeli opravka s preslikavo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, ki številu a priredi največje celo število, ki ni večje od a. Sliki $f(a)$ pravimo *celi del* števila a in jo običajno označujemo z $f(a) = \lfloor a \rfloor$. ■



Slika 1.1: Preslikava množice A v množico B

Če se zgodi, da je $A = B$, je $f(a) \in A$. Množico A smo tako upodobili vase. Med upodobitvami množice A vase zasluži posebno mesto *identična* upodobitev $id : A \to A$, ki vsak element množice A preslika nase: $\mathrm{id}(a) = a$.

Preslikava $f : A \to B$ je *injektivna*, če sta sliki različnih elementov vedno različna elementa

$$a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b).$$

Za injektivne preslikave velja, da je vsak $b \in B$ slika največ enega elementa $a \in A$. Preslikava $f : A \to B$ je *surjektivna*, kadar je njena zaloga vrednosti enaka celi množici B, torej $f(A) = B$. Za surjektivne preslikave velja, da je vsak element množice B slika vsaj enega elementa iz množice A.

Naj bo upodobitev $f : A \to B$ surjektivna in injektivna. V tem primeru je vsak element iz množice B slika natančno enega elementa iz množice A. Tako upodobitev imenujemo *bijektivna* ali *povratno-enolična* preslikava.

Primer 1.1.3. Navedimo nekaj zgledov:

1. Prva preslikava iz primera 1.1.2, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, je očitno injektivna, saj je za $n_1 \neq n_2$ tudi $2n_1 \neq 2n_2$. Vendar pa ni surjektivna, ker liha števila niso v zalogi vrednosti.

Preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je dana z istim predpisom, in ima za definicijsko območje vsa realna števila, je tako injektivna kot surjektivna, torej bijektivna.

2. Druga preslikava iz primera 1.1.2, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = \lfloor a \rfloor$ je surjektivna, injektivna pa ne, saj je na primer

$$\lfloor 1 \rfloor = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor .$$

3. Preslikava $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dana s predpisom $f(z) = -z$ je injektivna in surjektivna, torej bijektivna. ∎

Če sta A in B množici s končno mnogo elementi in $f : A \to B$ bijektivna preslikava med njima, pripada vsakemu elementu iz A natanko en element iz B in vsak element iz B je slika natanko enega elementa iz A, torej imeta obe množici isto število elementov. Številu elementov končne množice pravimo *moč* množice. Množici A in B imata torej v tem primeru isto moč. Moč neskončnih množic je teže definirati, vendar tudi v tem primeru velja, da imata dve množici isto moč (torej, ohlapno rečeno, isto število elementov), če obstaja bijektivna preslikava med njima.

Primer 1.1.4. Moč neskončne množice je včasih v nasprotju z intuitivno predstavo o številu elementov, ki smo se je navadili pri končnih množicah:

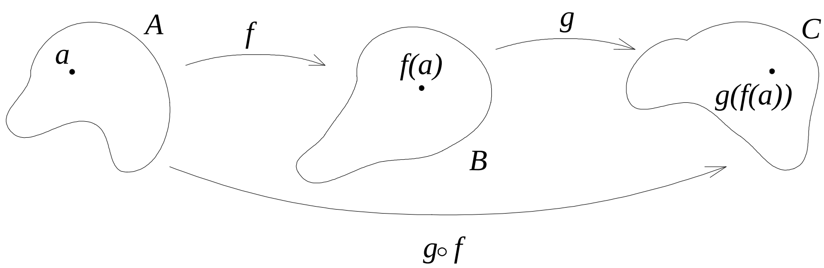
1. Preslikava $f : \mathbb{N} \to \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ je bijektivna preslikava. Množica naravnih števil ima torej isto moč kot množica sodih naravnih števil.

2. Množici

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ 0 \le x \le 1\} \quad \text{in} \quad B = \{x \in \mathbb{R};\ 0 \le x \le 10\}.$$

predstavljata daljici na številski premici — prva ima dolžino 1, druga pa dolžino 10. Preslikava $f : A \to B$, dana s predpisom $f(x) = 10x$, je očitno bijektivna preslikava, torej sta obe daljici (različnih dolžin) množici z isto močjo. Nasploh lahko poiščmo bijektivno preslikavo med poljubnima daljicama, torej so vse daljice množice z isto močjo.

3. Preslikava $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, dana s predpisom $f(x) = \operatorname{tg} x$, je bijektivna preslikava. Cela množica $\mathbb{R}$ ima torej isto moč kot jo imajo intervali. ∎



Slika 1.2: Sestavljena upodobitev

Naj bo f upodobitev množice A v množico B in g upodobitev množice B v množico C. Tako lahko vsak $a \in A$ preslikamo najprej v $f(a) \in B$, tega pa v element $g(f(a)) \in C$. Enak učinek lahko dosežemo tudi z eno samo preslikavo, ki $a \in A$ preslika v $g(f(a)) \in C$ (glej sliko 1.2). Taki upodobitvi pravimo *sestavljena preslikava* ali *kompozitum* in jo označimo s simbolom $g \circ f$. Tako je $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Primer 1.1.5. Navedimo dva zgleda za kompozitum:

1. Naj bo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ preslikava iz primera 1.1.2, tj. $f(n) = 2n$. Potem je $(f \circ f)(n) = 4n$.

2. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $f(x) = 2x$ in $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $f(x) = x^2$. Potem sta preslikavi $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ določeni z

$$(f \circ g)(x) = 2(x^2) = 2x^2 \quad \text{in} \quad (g \circ f)(x) = (2x)^2 = 4x^2.$$

■

Če je preslikava $f : A \to B$ injektivna, je vsak element $b \in f(A)$ slika natanko enega elementa $a \in A$. Torej obstaja predpis, ki vsakemu elementu $b \in f(A)$ priredi natanko določen $a \in A$ — tisti a, za katerega je $f(a) = b$. Preslikavi iz $f(A) \subseteq B$ v A, ki smo jo s tem definirali, pravimo preslikavi f *inverzna* preslikava in jo zapišemo kot $f^{-1} : f(A) \to A$. Definicijsko območje preslikave f^{-1} je zaloga vrednosti $f(A)$ preslikave f, njena zaloga vrednosti je definicijsko območje A preslikave f. Če je f tudi surjektivna preslikava, je definicijsko območje preslikave f^{-1} cela množica B. Inverzno preslikavo lahko opišemo tudi takole:

Izrek 1.1.1. *Preslikava $g : f(A) \to A$ je preslikavi f inverzna, če velja:*

$$g \circ f = \mathrm{id} : A \to A \quad \textit{in} \quad f \circ g = \mathrm{id} : f(A) \to f(A)$$

Primer 1.1.6. Preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, je injektivna, njena inverzna preslikava $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pa je dana s predpisom $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

Tudi preslikava $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dana s predpisom $g(z) = -z$, ima inverzno preslikavo $g^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, ki je dana s predpisom $g^{-1}(z) = -z$. V tem primeru je torej $g^{-1} = g$. ■

Pogosto bomo imeli opravka z *grafi* preslikav.

Definicija 1.1.2. *Graf preslikave* $f : A \to B$ je podmnožica kartezičnega produkta

$$\Gamma(f) = \{(a, f(a)); a \in A\} \subset A \times B.$$

Primer 1.1.7. Če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je njen graf

$$\{(x, f(x));\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Kartezični produkt $\mathbb{R}^2$ si lahko predstavljamo kot množico točk v ravnini, v kateri smo izbrali pravokotni koordinatni sistem, graf $\Gamma(f)$ pa je, če je funkcija f dovolj lepa, krivulja v $\mathbb{R}^2$.

Na primer, graf preslikave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ je premica skozi izhodišče. ■

1.2 Realna števila

1.2.1 Opisi množice realnih števil

Realna števila si lahko predstavljamo vsaj na tri načine: kot abstraktne elemente neke množice, v kateri so definirane določene operacija (algebrajsko), kot točke na številski premici (geometrijsko) in kot neskončna decimalna števila.

Algebrajski opis realnih števil

Množica realnih števil $\mathbb{R}$ je *komutativen obseg.* To pomeni, da sta v $\mathbb{R}$ definirani dve binarni operaciji: *seštevanje* in *množenje*, ki imata naslednje lastnosti. Obe sta *komutativni*

$$a + b = b + a \quad \text{in} \quad a \cdot b = b \cdot a,$$

in *asociativni*

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{in} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

množenje pa je *distributivno* glede na seštevanje:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Dve realni števili imata posebno vlogo: število 0 je *nevtralni element za seštevanje* (ali ničla), torej je $a + 0 = a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$, število 1 pa je *nevtralni element za množenje* (ali enota), za katero je $a \cdot 1 = a$ za vsak $a \in \mathbb{R}$. Vsako realno število ima svoje nasprotno število $-a$, za katero velja $a + (-a) = 0$, če je $a \neq 0$ ima tudi svoje inverzno število a^{-1}, za katero velja $a \cdot a^{-1} = 1$.

Vsoto $a + (-b) = a - b$ imenujemo *razlika* števil a in b, produkt $a \cdot b^{-1}$, kjer je $b \neq 0$ pa *kvocient* števil a in b. Tako smo pridobili še dve novi operaciji — *odštevanje* in *deljenje.*

Obseg $\mathbb{R}$ je *urejen.* Do ureditve realnih števil pridemo tako, da razdelimo realna števila na tri podmnožice — *pozitivna števila, negativna števila* in *število* 0, tako da velja: za vsako število $a \neq 0$ je natanko eno od števil a in $-a$ pozitivno, množica pozitivnih števil pa je zaprta za seštevanje in množenje, tj. če sta a in b pozitivni števili, sta $a + b$ in $a \cdot b$ pozitivni števili.

S pomočjo te delitve realna števila *uredimo*, tako da definiramo relacijo *manjši*: število a je manjše od števila b, kar zapišemo $a < b$ ali pa $b > a$, natanko takrat, kadar je $b - a$ pozitivno število.

Relacija $<$ ima nekaj lastnosti, ki jih pogosto uporabljamo pri računanju z neenačbami:

Izrek 1.2.1.

1. Zakon trihotomije: *Za vsak par realnih števil a, b velja natanko ena od treh možnosti: $a = b$, $a < b$ ali pa $a > b$.*

2. Zakon tranzitivnosti: *če je $a < b$ in $b < c$, je $a < c$.*

3. *Če je $a < b$, je $a + c < b + c$, kjer je c poljubno realno število.*

4. *Če je $a < b$ in $c > 0$, je $a \cdot c < b \cdot c$.*

5. *Če sta a in b pozitivni števili in je $a < b$, je $a^{-1} > b^{-1}$.*

POZOR! Četrta lastnost pravi, da lahko neenačbo množimo s pozitivnim številom. Če neenačbo množimo z negativnim številom se neenačaj obrne: če je $a < b$ in $c < 0$, je $ac > bc$.

Vsaki množici, ki ima vse doslej naštete lastnosti, pravimo *urejen komutativen obseg.*

Pogosto uporabljamo tudi relacijo *manjši ali enak*: število a je manjše ali enako številu b, kar zapišemo $a \leq b$ oziroma $b \geq a$, če je $a < b$ ali pa $a = b$.

Absolutna vrednost je preslikava iz $\mathbb{R}$ v množico nenegativnih realnih števil, ki je določena s predpisom:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{če je} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{če je} \quad a < 0. \end{cases}$$

Zapišimo nekaj lastnosti absolutne vrednosti:

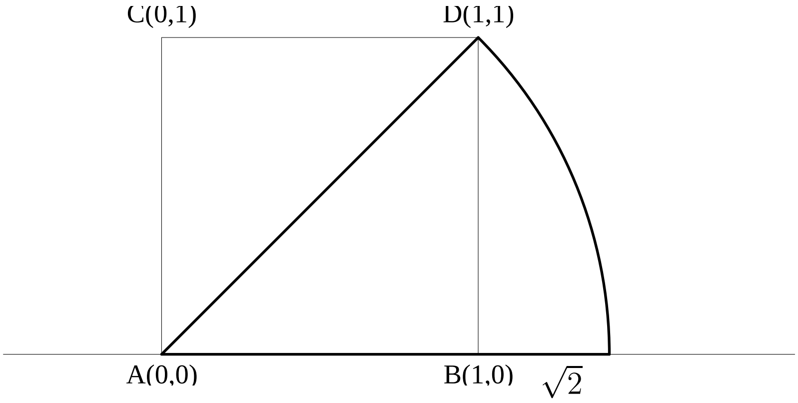
$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|, \tag{1.1}$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|. \tag{1.2}$$

Neenakostima (1.1) pravimo *trikotniški pravili.* Vse tri zveze bomo dokazali v širšem okviru v poglavju o kompleksnih številih. S pomočjo absolutne vrednosti lahko merimo razdalje med realnimi števili: razdalja med številoma a in b je enaka $|a - b|$.

Številska premica

Geometrijsko lahko realna števila predstavimo kot točke na *številski premici*, kjer smo izbrali *izhodišče*, tj. točko, ki predstavlja število 0, in (običajno desno od nje) točko, ki predstavlja število 1. S tem smo določili *koordinatni sistem* na številski premici in enoto za merjenje dolžine. Vsakemu številu $a \in \mathbb{R}$ pripada natanko določena točka na številski premici: če je a pozitivno



Slika 1.3: Število, katerega kvadrat je enak 2, na številski premici

število, mu pripada točka desno od 0, ki je od 0 oddaljena za $|a|$, če je a negativno, pa je ustrezna točka na levi, za $|a|$ oddaljena od 0.

Konstrukcija števila $\sqrt{2}$ na realni osi je prikazana na sliki 1.3.

Na številski premici se nazorno pokažejo nekatere relacije med števili. Na primer, število $-a$ je simetrično številu a glede na izhodišče 0. Relacija $b < a$ se odraža tako, da je b levo od a (slika 1.4). Vsoto števil a in b dobimo tako, da število a premaknemo po številski premici v smeri in za dolžino, ki ju določa b, tako kot kaže slika 1.5.

Množico vseh števil na daljici med dvema danima številoma $a < b$, imenujemo omejen *interval*. Interval je *odprt*, *zaprt* ali *polodprt*, glede na to, ali vsebuje svoja krajišča ali ne:

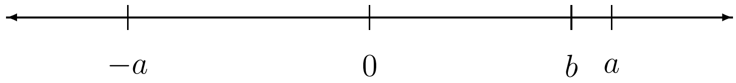
$$\begin{array}{rcll} (a,b) & = & \{x : a < x < b\} & \text{odprt interval} \\ [a,b] & = & \{x : a \leq x \leq b\} & \text{zaprt interval} \\ [a,b) & = & \{x : a \leq x < b\} & \text{polodprt interval} \\ (a,b] & = & \{x : a < x \leq b\} & \text{polodprt interval} \end{array}$$

Absolutna vrednost razlike $|a - b|$ je enaka *dolžini intervala*, (a, b), to je *razdalja* med številoma a in b na številski premici.

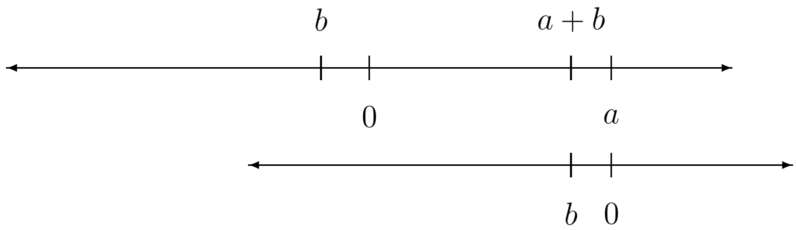
Naj bo ε majhno pozitivno število. Množica

$$\{x;\ |x - a| < \varepsilon\}$$

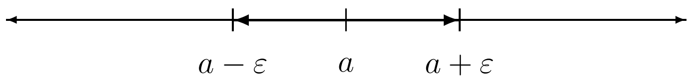
vsebuje natanko tista števila x, ki so od števila a oddaljena za manj kot ε. Pravimo ji *ε-okolica števila a* in jo lahko zapišemo tudi kot odprt interval dolžine 2ε s središčem v točki a, torej $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (slika 1.6).



Slika 1.4: Relacije med števili na številski premici



Slika 1.5: Seštevanje na številski premici



Slika 1.6: ε-okolica števila a

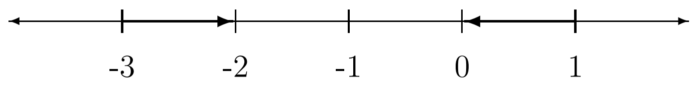
Poznamo tudi *neomejene intervale*, to so poltraki na številski premici ali pa cela številska premica:

$$\begin{array}{rcll}
(a,\infty) & = & \{x : a < x\} & \text{odprt navzgor neomejen interval} \\
[a,\infty) & = & \{x : a \leq x\} & \text{zaprt navzgor neomejen interval} \\
(-\infty,a) & = & \{x : x < a\} & \text{odprt navzdol neomejen interval} \\
(-\infty,a] & = & \{x : x \leq a\} & \text{zaprt navzdol neomejen interval} \\
(-\infty,\infty) & = & \mathbb{R} & \text{Vsa realna števila}
\end{array}$$

Pozor! Simbola ∞ ali $-\infty$ v zapisu neomejenih intervalov ne predstavljata realnih števil, temveč sta le znaka, ki nam povesta, da interval v tisto smer ni omejen.

Primer 1.2.1. Katera realna števila določa neenačba

$$1 < |x+1| \leq 2 \ ? \tag{1.3}$$



Slika 1.7: Rešitve neenačbe $1 < |x+1| \leq 2$

Če je $x + 1 \geq 0$, neenačbo lahko prepišemo kar brez absolutne vrednosti

$$1 < x + 1 \leq 2,$$

torej mora biti $0 < x \leq 1$.

Če pa je $x + 1 < 0$, moramo izrazu pod absolutno vrednostjo spremeniti predznak

$$1 < -(x + 1) \leq 2,$$

torej je $-3 \leq x < -2$.

Neenačba (1.3) torej določa unijo intervalov $[-3, -2) \cup (0, 1]$. ■

Decimalna števila

Kadar računamo, zapišemo realna števila običajno v obliki decimalnih števil. Decimalni zapis pozitivnega realnega števila a izgleda takole:

$$a = n.d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

kjer je n celo število in $d_1, d_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$. Pozitivnemu realnemu številu a priredimo decimalno število takole: celi del $n = \lfloor a \rfloor$ je največje celo število, ki ni večje od a in ga določimo tako, da poltrak $[0, \infty)$ razdelimo na polodprte intervale dolžine 1, $[n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, in poiščemo tistega, ki vsebuje a. Interval $[n, n + 1)$ potem razdelimo na polodprte intervale dolžine $\frac{1}{10}$ in določimo prvo decimalko d_1 tako, da je $a \in [n + \frac{d_1}{10}, n + \frac{d_1+1}{10})$. Ostale decimalke določimo podobno. Negativnemu številu a pripredimo decimalni zapis tako, da ga zapišemo v obliki $a = -|a| = -n.d_1 d_2 d_3 \ldots$, število 0 pa ima decimalni zapis $0.000\ldots$.

Opisani postopek ni edini možen in lahko se zgodi, da dve različni decimalni števili predstavljata isto realno število. Na primer: čtevilo $0.999\ldots$ lahko zapišemo kot *geometrijsko vrsto*

$$0.999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots,$$

katere vsota je enaka

$$\frac{9}{10} \frac{1}{1 - 1/10} = -\frac{9}{9} = 1,$$

zato je

$$0.99999\ldots = 1.00000\ldots .$$

Realna števila, zapisana v decimalni obliki je lahko primerjati po velikosti. Ne samo, da takoj vidimo, katero od dveh števil je večje, vidimo tudi, za koliko večje je. Velja namreč:

Če se decimalni števili a in b ujemata v celem delu in v prvih m decimalkah, je $|a-b| < 10^{-m}$.

Na primer, če števili

$$\frac{17}{20} \quad \text{in} \quad \frac{45}{53}$$

zapišemo v decimalni obliki

$$\frac{17}{20} = 0.85000 \quad \text{in} \quad \frac{45}{53} = 0.84905\ldots$$

je očitno da je prvo večje in to za manj kot 10^{-1} (celo za manj kot 10^{-3}).

Pri računanju uporabljamo (razen, če računamo z ulomki) le končna decimalna števila, ki jih dobimo tako, da neskončne decimalke *zaokrožimo* na določeno število decimalnih mest.

Realna števila smo zapisali v najbolj običajni obliki - v desetiškem številskem sistemu. Prav tako bi lahko uporabili kakšno drugo osnovo, na primer 2, 8, 16,. . . .

1.2.2 Številske podmnožice realnih števil

Naravna števila

Naj bo $1 \in \mathbb{R}$ enota za množenje. Vsote

$$1+1=2, 1+1+1=3, \ldots$$

imenujmo *naravna števila.* Množica naravnih števil

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

je tesno povezana s štetjem. Očitno je zaprta za seštevanje in množenje (vsota in produkt dveh naravnih števil sta spet naravni števili).

Tako kot $\mathbb{R}$, je tudi množica $\mathbb{N}$ urejena z relacijo $<$. Vsako naravno število n ima glede na relacijo $<$ v množici $\mathbb{N}$ svojega neposrednega naslednika — število $n+1$. V množici $\mathbb{R}$ o neposrednem nasledniku ne moremo govoriti.

Množica $\mathbb{N}$ ima še eno ključno lastnost, ki jo razlikuje od ostalih osnovnih številskih množic, pravimo pa ji

Princip popolne indukcije: *Vsaka podmnožica naravnih števil, ki vsebuje število* 1 *in je v njej hkrati s številom* n *tudi njegov naslednik* $n+1$*, vsebuje vsa naravna števila.*[2]

Princip popolne indukcije pogosto uporabljamo za dokazovanje trditev in izrekov. Vsak tak dokaz poteka v dveh fazah:

1. Najprej dokažemo, da trditev velja za naravno število 1.

2. Nato dokažemo, da iz veljavnosti trditve za naravno število n (*indukcijska predpostavka*) lahko sklepamo, da trditev velja tudi za naslednje naravno število $n+1$.

Primer 1.2.2. Dokažimo, da enačba

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.4}$$

velja za vsa naravna števila n.

1. Za $n = 1$ je veljavnost trditve očitna.

2. Predpostavimo, da enačba velja za neko naravno število k.

   Označimo $S_k = 1 + 2 + \cdots + k$ in izračunajmo S_{k+1}. Zaradi indukcijske predpostavke velja

   $$S_{k+1} = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

   Desno stran te enakosti spravimo na skupen imenovalec, pa že imamo

   $$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

   kar pomeni, da enačba (1.4) velja tudi za $k+1$.

Enačba (1.4) torej velja za vsa naravna števila. ■

[2]Princip popolne indukcije lahko uporabimo tudi za množice, ki jih lahko bijektivno preslikamo na $\mathbb{N}$, na primer $\{x \in \mathbb{Z};\ x > a\}$

Primer 1.2.3. Dokažimo, da so vsa števila oblike

$$f(n) = 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5; \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$$

deljiva z 9.

1. $f(0) = 1 + 3 \cdot 4^2 + 5 = 54 = 9 \cdot 6$.
2. Predpostavimo, da je število $f(k) = 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5$ za neko naravno število k deljivo z 9. Potem je

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5 - 10^k - 3 \cdot 4^{k+2} - 5 \\ &= 9(10^k + 4^{k+2}), \end{aligned}$$

   kar pomeni, da je razlika $f(k+1)-f(k)$ deljiva z 9, zaradi predpostavke pa mora biti tudi $f(k+1)$ deljivo z 9. ■

Cela števila

Množico celih števil dobimo tako, da naravnim številom dodamo vsa njihova nasprotna števila in število 0:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Množica celih števil je zaprta za seštevanje in množenje, pa tudi za odštevanje (kar za množico $\mathbb{N}$ ne velja). Vsaki množici, v kateri so definirane operacije seštevanje, množenje in odštevanje, z vsemi naštetimi lastnosti, pravimo *kolobar*.

Racionalna števila

Če množici $\mathbb{Z}$ dodamo še vse kvociente $a \cdot b^{-1}$, kjer sta $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{N}$, dobimo množico racionalnih števil $\mathbb{Q}$. Vsako racionalno število lahko predstavimo kot *ulomek* m/n, kjer je *števec* m celo, *imenovalec* n pa naravno število. Dva različna ulomka m/n in p/q predstavljata isto racionalno število, če je $mq = np$. Ulomek p/q je *okrajšan*, če sta p in q tuji si števili.

Množica $\mathbb{Q}$ je zaprta za seštevanje, množenje in odštevanje, torej je kolobar. Poleg tega je zaprta tudi za deljenje z neničelnim številom, torej je, podobno kot $\mathbb{R}$, obseg. Za računanje v $\mathbb{Q}$ uporabljamo dobro znana pravila za računanje z ulomki.

Znano je, da obstajajo realna števila, ki niso racionalna (to so vedeli že starogrški matematiki). Pravimo jim *iracionalna števila*. Primer takega števila je $\sqrt{2}$, tj. dolžina diagonale kvadrata s stranico 1. Omenimo le, da je iracionalnih števil zelo veliko — celo mnogo več kot racionalnih (za dokaz glej [6, str.117]).

Trditev 1.2.2. *Število* $\sqrt{2}$ *ni racionalno.*

Dokaz: Če bi bilo $\sqrt{2}$ racionalno število, bi ga lahko zapisali kot

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z},$$

kjer števili m in n nimata skupnih deliteljev. Potem je

$$m^2 = 2n^2,$$

torej je m^2 sodo število. Potem je tudi m sodo (saj imata m in m^2 iste prafaktorje), torej $m = 2k$ in

$$4k^2 = 2n^2.$$

Od tod sledi $n^2 = 2k^2$, torej je n sodo število, to pa je v nasprotju s predpostavko, da m in n nimata skupnih deliteljev. Tako smo na podlagi predpostavke, da je $\sqrt{2}$ racionalno število, zašli v protislovje, predpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalno število je bila napačna. ∎

Sklep, ki smo ga opisali, imenujemo *dokaz s protislovjem*. Tak način dokazovanja v matematiki pogosto uporabljamo.

1.2.3 Omejene podmnožice realnih števil

Definicija 1.2.1. Množica $A \subset \mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja tako realno število M, da za vsak $a \in A$ velja $a \leq M$. Število M imenujemo *zgornja meja* množice A.

Množica A je *navzdol omejena*, če obstaja tako število m, da za vsak element $a \in A$ velja $a \geq m$. Število m je *spodnja meja* množice A.

Množica A je *omejena*, če obstaja tako število M, da je $|a| \leq M$ za vsak $a \in A$, tj. če je navzgor in navzdol omejena.

Primer 1.2.4. Interval (a, ∞) je navzdol omejena množica s spodnjo mejo a, navzgor pa ni omejena. Interval $(-\infty, b]$ je navzgor omejena množica z zgornjo mejo b, navzdol pa ni omejena. Nazadnje, interval $[a, b]$ je primer omejene množice. ■

Navzgor omejena množica še zdaleč nima ene same zgornje meje – če je M njena zgornja meja in $N > M$, je očitno tudi N njena zgornja meja. Podobno velja tudi za spodnjo mejo.

Definicija 1.2.2. Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ navzgor omejena in $B \subset \mathbb{R}$ navzdol omejena neprazna množica. Število M je *natančna zgornja meja* ali *supremum* množice A, če je najmanjša med vsemi njenimi zgornjimi mejami, kar zapišemo $M = \sup A$. Podobno je m *natančna spodnja meja* ali *infimum* množice B največja med vsemi njenimi spodnjimi mejami, kar zapišemo kot $m = \inf B$.

Če od števila $M = \sup A$ odštejemo še tako majhen ε, dobljena razlika $M - \varepsilon$ ni več zgornja meja množice A. Zato lahko natančno zgornjo (in podobno tudi natančno spodnjo) mejo množice opišemo tudi takole:

Trditev 1.2.3. *$M = \sup A$ natanko takrat, kadar je $a \leq M$ za vsak $a \in A$ in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak element $a \in A$, da je $a > M - \varepsilon$.*

Podobno je $m = \inf B$, če je $m \leq b$ za vsak $b \in B$ in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak element $b \in B$, da je $m + \varepsilon > b$.

Za intervale velja:

$$\sup(a, b) = b \quad \text{in} \quad \inf(a, b) = a,$$

pa tudi

$$\sup[a, b] = b \quad \text{in} \quad \inf[a, b] = a.$$

Za splošne navzgor omejene podmnožice realnih števil pa še zdaleč ni tako očitno, da imajo tudi natančno zgornjo mejo. Ena od ključnih lastnosti realnih števil je:

1.2.4. Dedekindov[3] aksiom ali lastnost kontinuuma. *Vsaka neprazna navzgor omejena množica realnih števil ima natančno zgornjo mejo. Podobno ima vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica $\mathbb{R}$ natančno spodnjo mejo.*

---

[3]Julius Richard Wilhelm Dedekind (1831–1916), nemški matematik. Ukvarjal se je z algebro in s teorijo števil.

Lastnost kontinuuma je tista ključna lastnost, ki loči obseg realnih števil od obsega racionalnih števil. Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$, ki je prav tako kot $\mathbb{R}$ urejen obseg, te lastnosti nima. Na primer, množica

$$A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$$

je neprazna in navzgor omejena, vendar v obsegu $\mathbb{Q}$ nima natančne zgornje meje. Njena natančna zgornja meja v obsegu $\mathbb{R}$ seveda obstaja in je enaka $\sqrt{2}$, to pa, kot smo se prepričali, ni racionalno število.

Kar nekaj pomembnih lastnosti realnih števil, ki jih pri računanju in sklepanju pogosto uporabljamo, temelji na lastnosti kontinuuma. Na primer:

Izrek 1.2.5. *[Arhimedova lastnost] Če sta x in y poljubni realni števili in je $y > 0$, obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $x < ny$.*

Dokaz. Recimo, da je $x \geq ny$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To pomeni, da je x zgornja meja množice

$$A = \{ny;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Ker je to omejena množica, mora imeti svojo najmanjšo zgornjo mejo $M = \sup A$, torej število $M - y$ ni več zgornja meja množice A, saj je $y > 0$. To pomeni, da obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $ny > M - y$. Vendar pa je potem $(n+1)y > M$. Ker je $(n+1)y \in A$, je to v nasprotju s predpostavko, da je M natančna zgornja meja množice A. □

Če v zgornjem izreku vzamemo $y = 1$, sledi, da je množica $\mathbb{N}$ navzgor neomejena. Če pa v izreku vzamemo $x = 1$, pa sledi, da za vsako pozitivno število y obstaja tak n, da je ulomek $1/n$ manjši od y. Drugače povedano, v poljubno majhni okolici (y-okolici) števila 0 je vsaj eno racionalno število $1/n$.

Arhimedova lastnost ima še eno posledico, ki pa je pomembna čisto s praktičnega stališča:

Trditev 1.2.6. *Vsako realno število a ima v vsaki svoji ε-okolici vsaj eno racionalno število p/q. Drugače povedano, vsako realno število lahko poljubno natančno aproksimiramo z racionalnim številom. Pravimo tudi, da so racionalna števila povsod gosta v množici realnih števil.*

Dokaz. Za število $a = 0$ smo trditev dokazali že zgoraj. Recimo, da je $a > 0$. Potem obstaja tak $q \in \mathbb{N}$, da je $\varepsilon > 1/q$. Po drugi strani, ker je množica $\mathbb{N}$ neomejena, obstaja tak $p \in \mathbb{N}$, da je $p - 1 \leq qa$ in $p > qa$, torej je

$$\frac{p-1}{q} \leq a < \frac{p}{q}$$

in

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| < \left|\frac{p-1}{q} - \frac{p}{q}\right| = \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

Če pa je $a < 0$, lahko najdemo racionalno število p/q v ε-okolici števila $-a$, torej je $-p/q$ v ε-okolici števila a. □

Dobro se je zavedati pomena te zadnje trditve. Pri računanju namreč uporabljamo izključno racionalna števila — iracionalna števila so za nas zgolj idealni objekti, za katere vemo, da obstajajo, vendar njihove natančne vrednosti ne moremo doseči. Vendar se jim lahko, zaradi Arhimedove lastnosti realnih števil, poljubno natančno približamo.

1.2.4 Potence in koreni

Naj bo a realno število. Spomnimo se definicije potence a^n, $n \in \mathbb{N}$:

$$a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ \ldots,\ a^n = a^{n-1} \cdot a,\ \ldots$$

Če je $a \neq 0$ lahko definiramo tudi potence $a^0 = 1$ in $a^{-n} = 1/a^n$, torej je za števila $a \neq 0$ definirana potenca a^n za vsak $n \in \mathbb{Z}$.

Trditev 1.2.7. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: če je $0 < a < b$, je tudi*

$$0 < a^n < b^n.$$

Dokaz. Trditev najlaže dokažemo z indukcijo. Za $n = 1$ nimamo kaj dokazovati, ker je po predpostavki $0 < a^1 < b^1$. Recimo, da je $0 < a^{n-1} < b^{n-1}$. Če ti dve neenačbi pomnožimo z $a > 0$, dobimo

$$0 < a^n < b^{n-1}a.$$

Po drugi strani, če neenačbo $a < b$ pomnožimo z b^{n-1}, dobimo $ab^{n-1} < b^n$, torej zaradi tranzitivnosti relacije $<$ sledi

$$0 < a^n < b^{n-1}a < b^n$$

in trditev je dokazana. □

Navedimo brez dokaza znano formulo za potenciranje binoma, ki jo bomo večkrat uporabili:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Koeficienti

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot\ \ 2\ \ \cdots\ \ \ k}$$

so *binomski simboli*.

Za negativne eksponente velja ravno obratna relacija kot za pozitivne: če je $0 < a < b$, je $0 < b^{-n} < a^{-n}$.

Naj bo $n \in \mathbb{Z}$. Če je $a > 0$ je tudi $a^n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Za $a < 0$, pa je predznak potence a^n odvisen od eksponenta: za sode eksponente $n = 2k$ je $a^n > 0$, za lihe eksponente $n = 2k + 1$ pa je $a^n < 0$.

Na sliki 1.3 smo konstruirali na številski premici število $\sqrt{2}$, za katero velja $(\sqrt{2})^2 = 2$. Velja pa še dosti več:

Izrek 1.2.8. *Za vsak $y \geq 0$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tako natanko določeno število $x \geq 0$, da je $x^n = y$.*

Dokaz. Oglejmo si množico $A = \{a \in \mathbb{R}; a^n \leq y\}$. Očitno je $0 \in A$, torej je A neprazna množica. Če je $0 \leq y \leq 1$, je 1 zgornja meja za množico A, kajti za vsako število $b > 1$, je tudi $b^n > 1 > y$, torej $b \notin A$. Če je $y > 1$, pa je y zgornja meja za množico A, kajti za vsak $b > y$ velja $b^n > y^n > y$, torej $b \notin A$.

Množica $A \subset \mathbb{R}$ je torej neprazna in navzgor omejena in ima svojo natančno zgornjo mejo $x = \sup A$, to pa je ravno število, ki ga iščemo. Pokažimo (brez podrobnosti), da je $x^n = y$.

Recimo, da bi bilo $x^n < y$ in $z = x + h$, kjer je $0 < h < 1$. Potem bi veljalo

$$\begin{aligned} z^n = (x+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \\ &= x^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\ &< x^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= x^n + h((x+1)^n - x^n). \end{aligned}$$

Če izberemo

$$h < \frac{y - x^n}{(x+1)^n - x^n},$$

dobimo

$$z^n < x^n + \frac{y - x^n}{(x+1)^n - x^n} \cdot ((x+1)^n - x^n) = y,$$

torej $z > x$ in $z \in A$. To pa je v protislovju s tem, da je $x = \sup A$.

Če pa bi bilo $x^n > y$, bi na podoben način pokazali, da je število $u = x - k$, kjer je

$$0 < k < 1, \quad k < x \quad \text{in} \quad k < \frac{x^n - y}{(x+1)^n - x^n},$$

zgornja meja množice A in $u < x$, kar spet ni mogoče, ker je x najmanjša zgornja meja za A. Veljati mora torej $x^n = y$. $\square$

Izrek, ki smo ga dokazali, omogoča, da za pozitivna realna števila definiramo tudi potence z racionalnimi eksponenti:

Definicija 1.2.3. Če je $y \geq 0$, imenujemo število x, ki zadošča enačbi $x^n = y$, *n-ti koren števila* y, kar zapišemo $x = \sqrt[n]{y}$.

Če je $y \geq 0$, in p/q; $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ poljubno racionalno število, definiramo:

$$y^{p/q} = (\sqrt[q]{y})^p.$$

Če je $n = 2k$ sodo število, je $x^n > 0$ za vsak $x \neq 0$. Enačba $x^n = y$ v tem primeru nima rešitve, če je $y < 0$, torej koren $\sqrt[n]{y}$ za $y < 0$ ne obstaja. Če je $n = 2k + 1$ liho število, pa za $x < 0$ velja $x^n = -(-x)^n < 0$. V tem primeru lahko razširimo definicijo korena še na negativna števila: za $y < 0$ je $\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{-y}$.

Za računanje s potencami veljata dobro znani pravili (ki jih ne bomo dokazovali):

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m \quad \text{in} \quad (a^n)^m = a^{(nm)}.$$

1.3 Kompleksna števila

Za vsak $a \in \mathbb{R}$ je $a^2 \geq 0$. To pomeni, da v okviru realnih števil enačba $x^2 = -1$ ni rešljiva. Enačbam oblike

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

pravimo *algebraične enačbe* naš primer kaže, da take enačbe v obsegu $\mathbb{R}$ nimajo vedno rešitev.

Množica kompleksnih števil je razširitev množice realnih števil z rešitvami algebraičnih enačb. Vsebuje tako vsa realna števila, kot tudi vse rešitve algebraičnih enačb (z realnimi, pa tudi s kompleksnimi koeficienti).

Definicija 1.3.1. *Kompleksno število* α je urejen par realnih števil (a, b); prvo, $a = \operatorname{Re}\alpha$, imenujemo *realna komponenta*, drugo, $b = \operatorname{Im}\alpha$, *imaginarna komponenta*. Množico vseh kompleksnih števil označimo s simbolom $\mathbb{C}$.

Dve kompleksni števili sta enaki, kadar imata enaki realni in enaki imaginarni komponenti.

Vsoto in produkt kompleksnih števil definiramo s predpisoma

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{1.5}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1.6}$$

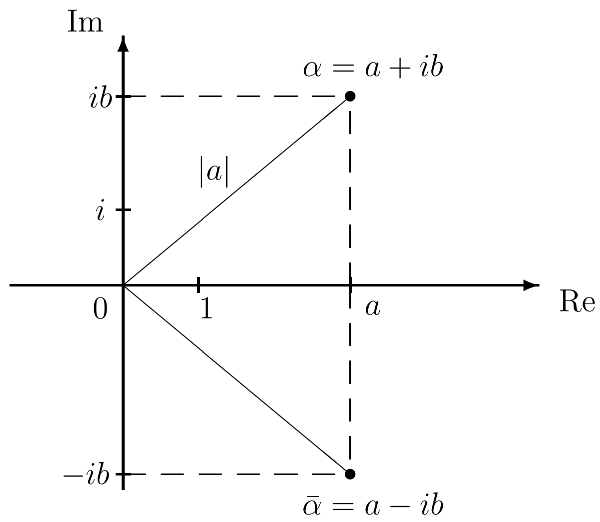
Izrek 1.3.1. *Množica $\mathbb{C}$ z operacijama (1.5) in (1.6) je obseg.*

Za dokaz tega izreka bi bilo potrebno preveriti, da velja komutativnost in asociativnost vsote in produkta in distributivnost produkta glede na seštevanje, da je število $(0,0)$ ničla za seštevanje in število $(1,0)$ enota za množenje. Za vsak $\alpha = (a,b)$ je število $-\alpha = (-a,-b)$ njegovo nasprotno število, če je $\alpha \neq (0,0)$ pa je

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

njegovo inverzno število. Vse te preproste izračune prepuščamo bralcu.

Kompleksna števila lahko upodobimo s točkami ravnine. V ravnini narišemo pravokotni koordinatni sistem. Na abscisno os, ki ji v tem primeru pravimo *realna os*, nanesemo realno komponento kompleksnega števila, na ordinatno os, ki ji pravimo *imaginarna os*, pa imaginarno komponento.



Slika 1.8: Kompleksna ravnina

Množica kompleksnih števil, ki ležijo na realni osi, tj. števil oblike $(a,0)$, ima vse lastnosti realnih števil, saj je zaprta za seštevanje in množenje, vsebuje tako ničlo $(0,0)$ kot enoto $(1,0)$, pa tudi obratno in inverzno število vsakega svojega števila (razen števila $(0,0)$). Kompleksno število $\alpha = (a,0)$ imamo lahko za zastopnika realnega števila a v množici $\mathbb{C}$, zato ga običajno pišemo kar a.

Kompleksnemu številu oblike $(0, b)$ na imaginarni osi pravimo *čisto imaginarno število.* Kvadrat čisto imaginarnega števila

$$(0, b) \cdot (0, b) = (-b^2, 0) = -b^2$$

je negativno realno število. Imaginarno število $(0, 1)$, katerega kvadrat je enak -1, imenujemo *imaginarna enota* in ga zaznamujemo z i. (V elektrotehniki se pogosto uporablja oznaka j.)

Vsako kompleksno število se da zapisati kot

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + ib.$$

Računski pravili (1.5) in (1.6) lahko zdaj zapišemo v bolj domači obliki:

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib) \cdot (c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Poleg seštevanja in množenja poznamo v množici $\mathbb{C}$ še eno enočleno operacijo, ki jo imenujemo *konjugiranje.*

Definicija 1.3.2. Številu $\alpha = a + bi$ *konjugirano število* je $\bar{\alpha} = a - ib$.

Število $\bar{\alpha}$ je simetrično številu α glede na realno os (slika 1.8). Naštejmo nekaj lastnosti konjugiranja. Dokazi so povsem preprosti, zato jih prepuščamo bralcu.

1. Konjugiranost števil je vzajemna: $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$
2. $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$
3. $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$
4. $\overline{(\alpha^{-1})} = (\bar{\alpha})^{-1}$

Število α je realno natanko takrat, kadar je $\bar{\alpha} = \alpha$ in imaginarno natanko takrat, kadar je $\bar{\alpha} = -\alpha$.

Za poljubno kompleksno število α je $\alpha + \bar{\alpha} = 2\,\mathrm{Re}(\alpha) \in \mathbb{R}$ realno in $(\alpha - \bar{\alpha}) = 2i\,\mathrm{Im}(\alpha)$ čisto imaginarno število. Število $\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$ je nenegativno realno število, ki je enako 0 samo, če je $\alpha = 0$, torej za vsak $\alpha \in \mathbb{C}$ obstaja kvadratni koren $\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$.

Definicija 1.3.3. *Absolutna vrednost* kompleksnega števila α je kvadratni koren števila $\alpha\bar{\alpha}$
$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Absolutna vrednost ali *modul* kompleksnega števila α je dolžina daljice, ki povezuje koordinatno izhodišče s kompleksnim številom α.

Če je $a \in \mathbb{R}$, se ta definicija ujema z že znano definicijo absolutne vrednosti realnega števila. Podobno kot pri realnih številih velja
$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|. \tag{1.7}$$
$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \tag{1.8}$$

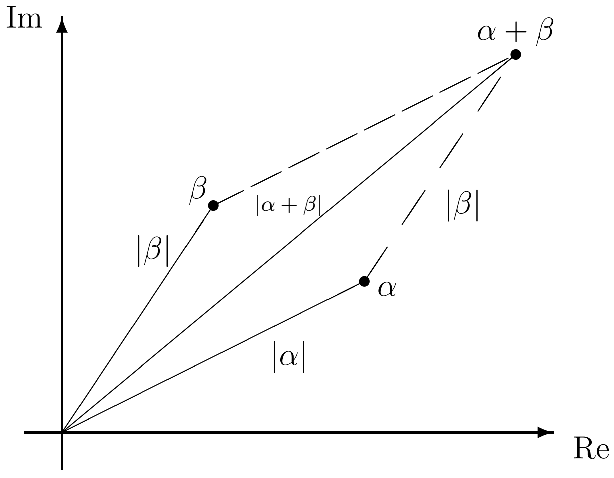
Dokaz enakosti (1.7) je preprost:
$$|\alpha \cdot \beta|^2 = (\alpha \cdot \beta)(\overline{\alpha \cdot \beta}) = (\alpha\bar{\alpha}) \cdot (\beta\bar{\beta}) = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2,$$
torej je
$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Dokažimo še *trikotniški pravili* (1.8):
$$|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta) \cdot \overline{(\alpha + \beta)} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + (\alpha \cdot \bar{\beta} + \beta \cdot \bar{\alpha}).$$
Ker je
$$(\alpha \cdot \bar{\beta} + \beta \cdot \bar{\alpha}) = \alpha\bar{\beta} + \overline{\alpha\bar{\beta}} = 2\,\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}) = 2|\alpha| \cdot |\beta|$$
in
$$\mathrm{Re}(\alpha\bar{\beta}) \leq |\alpha\bar{\beta}| = |\alpha| \cdot |\beta|,$$
je
$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2$$
in prvo trikotniško pravilo je dokazano.

Drugo trikotniško pravilo je posledica prvega:
$$|\alpha| = |(\alpha + \beta) - \beta| \leq |\alpha + \beta| + |-\beta| = |\alpha + \beta| + |\beta|,$$
zato je $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|$. Prav tako pokažemo, da je $|\beta| - |\alpha| \leq |\alpha + \beta|$, torej mora biti tudi $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$. □

Na sliki (1.8) vidimo, da sta trikotniški pravili (1.8) enakovredni dobro znanemu dejstvu iz geometrije: vsaka stranica v trikotniku je daljša od razlike in krajša od vsote ostalih dveh stranic.

S pomočjo absolutne vrednosti lahko merimo razdalje med kompleksnimi števili: razdalja med α in β je enaka $|\alpha - \beta|$.



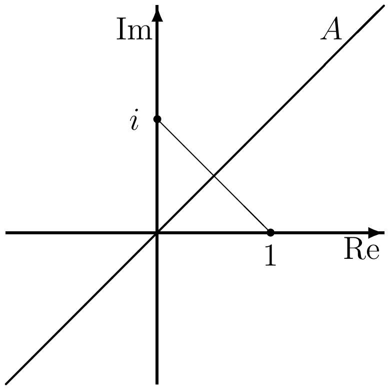
Slika 1.9: Upodobitev kompleksnega števila

Primer 1.3.1. Predstava o absolutni vrednosti kot o razdalji med dvema številoma nam včasih olajša razmišljanje:

1. Poiščimo množico
$$A = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| = |z-i|\}.$$
Množica A vsebuje vsa tista kompleksna števila, ki so enako oddaljena od 1 in od i, torej ležijo na simetrali lihih kvadrantov (slika 1.10)

2. Množica
$$B = \{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| = r\}$$
je krožnica s središčem v z_0 in radijem r.

3. Množica
$$C = \{z \in \mathbb{C};\ |z-z_1| + |z-z_1| = r\}$$
je elipsa z goriščema z_1 in z_2 (*klasična* definicija elipse: elipsa je množica točk, za katere je vsota razdalj do dveh fiksnih točk (*gorišč*) konstantna). ■



Slika 1.10: Množica A iz primera 1.3.1

Polarni zapis kompleksnega števila

Lego kompleksnega števila $z \neq 0$ v ravnini lahko opišemo tudi v polarnih koordinatah, tako, da podamo oddaljenost $|z|$ števila z od izhodišča 0 in kotom φ, med poltrakom iz 0 skozi točko z in pozitivnim delom realne osi, ki mu pravimo *argument* števila z, kar zapišemo $\varphi = \arg z$. Argument kompleksnega števila ni enolično določen, saj določajo vsi argumenti $\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ isti poltrak v kompleksni ravnini. Če izberemo argument tako, da leži na intervalu $[0, 2\pi)$, pravimo, da smo izbrali *glavno vrednost* argumenta in ta je določena enolično za vsak $z \neq 0$.

Prehod od zapisa po komponentah do polarnega zapisa kompleksnega števila $z = x + iy$ je določen z enačbami

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

obratni prehod pa z

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Tako dobimo *polarni zapis* kompleksnega števila $z = x + iy$:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Primer 1.3.2. Prehod od zapisa po komponentah do polarnega zapisa in obratno:

1. Število $z = -4\sqrt{3} + 4i$ zapišimo v polarni obliki.

   Najprej izračunamo absolutno vrednost

$$|z| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8,$$

   nato iz enačb

$$\cos\varphi = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

   ugotovimo, da je glavna vrednost argumenta enaka $\varphi = 5\pi/6$, torej

$$z = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

2. Kompleksno število z absolutno vrednostjo $|z| = 3$ in argumentom $\arg z = -\pi/10$ zapišimo po komponentah.

$$\begin{aligned} z &= 3\left(\cos\frac{-\pi}{10} + i\sin\frac{-\pi}{10}\right) \\ &= 3\left(\cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{\pi}{10}\right) \approx 2.85 - 0.93i. \end{aligned}$$

■

Kompleksni števili zapisani v polarni obliki $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ sta enaki natanko tedaj, ko je $r_1 = r_2$ in $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$.

Produkt dveh kompleksnih števil v polarni obliki

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{in} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

je enak

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &\quad +i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Pri množenju se torej moduli množijo: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, argumenti pa seštevajo: $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Kvocient dveh kompleksnih števil z_1 in $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

ima modul $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ in $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Če pravilo za produkt uporabimo za n enakih faktorjev

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

dobimo znano pravilo za potenciranje kompleksnih števil, imenovano tudi de Moivreov[4] obrazec

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Primer 1.3.3. Izračunajmo z^{10}, če je $z = 1 + i$.

Zapišimo z v polarni obliki:

$$z = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$$

in izračunajmo po de Moivrejevem obrazcu

$$z^{10} = \sqrt{2}^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = 32i.$$

■

Pogosto uporabljamo oznako

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Tako dobimo zapis kompleksnega števila v *eksponentni obliki*:

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Pravila za računanje v eksponentni obliki izgledajo takole:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \\ z^n &= |z|^n e^{in\varphi}. \end{aligned}$$

[4] Abraham de Moivre (1667–1754), Francoski matematik

Koreni kompleksnih števil

Naj bo p/q racionalno število, kjer $p \in \mathbb{Z}$ in $q \in \mathbb{N}$ nimata skupnega delitelja.

Definicija 1.3.4. Definirajmo $z^{p/q}$ s predpisom

$$w = z^{p/q} \quad \Longleftrightarrow \quad w^q = z^p.$$

Števili w in z naj bosta dani v polarni obliki: $w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ in $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Iz zgornje definicije sledi

$$\rho^q[\cos(q\vartheta) + i\sin(q\vartheta)] = r^p[cos(p\varphi) + i\sin(p\varphi)].$$

Število na levi je enako številu na desni, če je $\rho^q = r^p$ in $q\vartheta - p\varphi = 2k\pi$, od koder dobimo

$$\rho = r^{p/q} \quad \text{in} \quad \vartheta = \frac{p\varphi + 2k\pi}{q}.$$

Izraz $z^{p/q}$ ni enolično določen, saj za vsak $k \in \mathbb{Z}$ dobimo eno vrednost

$$w_k = z^{p/q} = r^{p/q}\left[\cos\frac{p\varphi + 2k\pi}{q} + i\sin\frac{p\varphi + 2k\pi}{q}\right]. \tag{1.9}$$

Zaradi periodičnosti funkcij sin in cos, je le q vrednosti med seboj različnih $w_0, w_1, \ldots, w_{q-1}$, potem pa se števila w_k začnejo ciklično ponavljati, tako da je $w_q = w_0,\ w_{q+1} = w_1,\ \ldots$.

V kompleksni ravnini ležijo koreni $w_0, w_1, \ldots, w_{q-1}$ na ogliščih pravilnega q-kotnika s središčem v točki 0, središčni kot med dvema sosednjima ogliščema je $2\pi/q$.

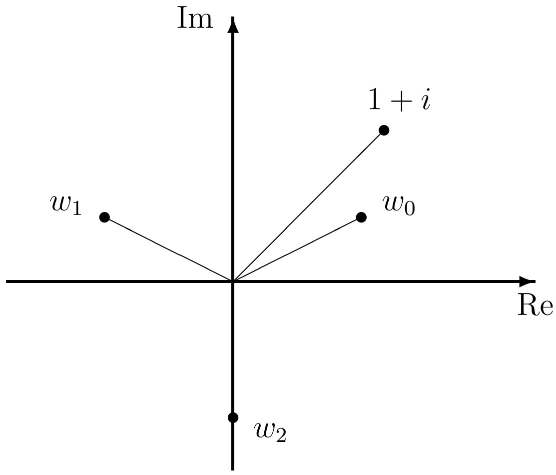
Primer 1.3.4. Izračunajmo vse vrednosti izraza $(1+i)^{2/3}$.

Najprej število $z = 1 + i$ zapišemo v polarni obliki

$$z = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4),$$

nato pa uporabimo enačbo (1.9) pri $p = 2$ in $q = 3$:

$$\begin{aligned} w_k &= \left(\sqrt{2}\right)^{2/3}\left[\cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right] \\ &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(1+4k)\pi}{6} + i\sin\frac{(1+4k)\pi}{6}\right). \end{aligned}$$



Slika 1.11: Koreni $(1+i)^{2/3}$

Za $k = 0, 1, 2$ dobimo zaporedoma vse tri vrednosti:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) &&= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\\
w_1 &= \sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) &&= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\\
w_2 &= \sqrt[3]{2}(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6}) &&= -i\sqrt[3]{2}.
\end{aligned}$$

■

Poglavje 2

Zaporedja in številske vrste

2.1 Zaporedja

2.1.1 Uvod

Definicija 2.1.1. Zaporedje

$$(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

je predpis, ki vsakemu naravnemu številu n (*indeksu* zaporedja) priredi neko realno število a_n (*n-ti člen* zaporedja). Zaporedje je torej preslikava množice naravnih števil v realna števila:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto a_n.$$

Zaporedje lahko podamo na več načinov. Najbolj preprosto je, da preslikavo zapišemo *eksplicitno:* $a_n = f(n)$.

Primer 2.1.1. Nekaj eksplicitno podanih zaporedij:

1. Zaporedje s splošnim členom $a_n = 1/2^n$:

$$\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots \frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2^{n+1}},\ \ldots.$$

2. Zaporedje

$$(a_n) = 0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, 0, \ldots$$

ima splošen člen $a_n = (1 + (-1)^n)/2$. ■

Zaporedje lahko podamo tudi *iterativno* ali *rekurzivno*, tako da zapišemo prvega ali prvih nekaj členov, in pravilo, kako izračunamo naslednji člen s pomočjo prejšnjih.

Primer 2.1.2. Nekaj rekurzivno podanih zaporedij:

1. *Aritmetično zaporedje* s prvim členom a_1 in z razliko d, dano s predpisom

   $$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \geq 1$$

   je primer enočlenske rekurzije.

2. Podobno je tudi *geometrijsko zaporedje* s prvim členom a_1 in kvocientom q, ki je dano s predpisom

   $$a_{n+1} = a_n q, \quad n \geq 1$$

   primer enočlenske rekurzije.

3. Dobro znano Fibonaccijevo[1] zaporedje, ki je določeno z začetnima vrednostima $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ in s predpisom

   $$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 2$$

   je primer dvočlenske rekurzije. ■

Množico členov zaporedja

$$\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R},$$

imenujemo *zaloga vrednosti* zaporedja. Zaporedje (a_n) je *navzdol omejeno*, *navzgor omejeno* ali *omejeno*, če je njegova zaloga vrednosti navzdol omejena, navzgor omejena ali omejena.

Navzgor omejeno zaporedje (a_n) ima zaradi lastnosti kontinuuma realnih števil (trditev 1.2.4) natančno zgornjo mejo $M = \sup a_n$, navzdol omejeno zaporedje (b_n) pa ima natačno spodnjo mejo $m = \inf b_n$. Natančna zgornja in natančna spodnja meja zaporedja sta lahko člena zaporedja, ali pa ne.

[1]Leonardo Fibonacci (1170–1250), italijanski matematik, ki je v Evropo prinesel arabske številke.

Primer 2.1.3. Nekaj omejenih zaporedij:

1. Zaporedje
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, \ldots, \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1}, \ldots$$
je omejeno, $\sup a_n = 1$ in $\inf a_n = 1/2$. Natančna zgornja meja $\sup(a_n)$ ni člen zaporedja.

2. Podobno lahko ugotovimo za naslednja zaporedja:

$(1/n)$	je omejeno,	$m = 0$, $M = 1$
$((-1)^n)$	je omejeno,	$m = -1$, $M = 1$
$((-2)^n)$	je neomejeno	
$(n^{(-1)^n})$	je navzdol omejeno,	$m = 0$

3. Vzemimo rekurzivno dano zaporedje $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$. Očitno je zaporedje (a_n) omejeno navzdol, saj je $a_n > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

   Manj očitno pa je, da je zaporedja (a_n) omejeno tudi navzgor. Pokažimo, da je $a_n < 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pomagali si bomo z indukcijo.

   - Za $n = 1$ trditev drži, saj je $a_1 = \sqrt{2} < 2$.
   - Recimo, da je $a_{n-1} < 2$. Potem je
   $$a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2$$
   in trditev je dokazana.

   Zaporedje (a_n) je torej omejeno. ■

Natančno zgornjo mejo zaporedja lahko opišemo tudi nekoliko drugače: $M = \sup a_n$ natanko tedaj, kadar so vsi členi manjši ali enaki M in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n_0} > M - \varepsilon$. V vsaki ε-okolici mora torej biti vsaj en člen zaporedja. Če M ne sodi med člene zaporedja, lahko sklepamo, da mora biti v vsaki njegovi ε-okolici celo neskončno mnogo členov zaporedja. To pripelje do pojma stekališča:

Definicija 2.1.2. Število a je *stekališče* zaporedja (a_n), kadar je v vsaki ε-okolici $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja.

Povzemimo:

Trditev 2.1.1. *Natančna zgornja meja je največji člen ali pa je stekališče zaporedja. Podobno je natančna spodnja meja najmanjši člen ali pa stekališče zaporedja.*

Seveda ima lahko zaporedje tudi kakšno stekališče, ki ni niti natančna zgornja niti natančna spodnja meja.

Kadar je a stekališče, je torej neenačba $|a-a_n| < \varepsilon$ izpolnjena za neskončno mnogo členov zaporedja. Lahko pa je še neskončno mnogo členov zaporedja, ki tej enačbi ne zadoščajo in so zato izven ε-okolice.

Primer 2.1.4. Stekališča zaporedja:

1. Zaporedje recipročnih vrednosti naravnih števil
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots$$
ima eno stekališče $a = 0 = \inf a_n$, ki ni člen zaporedja.
To sledi iz Arhimedove lastnosti množice $\mathbb{R}$ (trditev 1.2.5), kajti v vsaki okolici $(-\varepsilon, \varepsilon)$ je vsaj eno število $a_n = 1/n$, torej so v isti okolici tudi vsa števila $a_m = 1/m < 1/n$, kjer je $m > n$, teh pa je neskončno mnogo.

2. Zaporedje $((-1)^n)$ ima dve stekališči, -1 in 1, ki sta obe tudi člena zaporedja.

3. Zaporedje (n^2) nima stekališč. ■

Izrek 2.1.2. *Vsako (navzgor in navzdol) omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz. Naj bo $m = \inf a_n$ in $M = \sup a_n$. Množica
$$A = \{x \in \mathbb{R};\ a_n < x \text{ za največ končno mnogo indeksov } n\}$$
je neprazna, saj je $m \in A$. Poleg tega je navzgor omejena, saj je $x < M$ za vsak $x \in A$. Torej ima svojo natančno zgornjo mejo $a = \sup A$.

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je $a = \sup A$, je $a - \varepsilon \in A$, torej je levo od števila $a - \varepsilon$ največ končno mnogo členov zaporedja. Po drugi strani pa $a + \varepsilon \notin A$, torej je levo od tega števila neskončno mnogo členov zaporedja. Od tega jih je končno mnogo levo od števila $a - \varepsilon$, torej jih mora biti na intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ neskončno mnogo. Drugače povedano, za vsak $\varepsilon > 0$ je v okolici $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja, torej je a stekališče zaporedja (a_n). □

2.1.2 Konvergentna zaporedja

Najbolj nas bodo zanimala zaporedja, pri katerih se vsi členi približujejo nekemu številu, ko postaja n vse večji. Natančneje:

Definicija 2.1.3. Zaporedje (a_n) *konvergira* proti številu a, natanko takrat, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da so v ε-okolici števila a vsi členi a_n z indeksom $n \geq n_0$.

Zaporedje, ki konvergira, je *konvergentno* zaporedje, število a je njegova *limita*, kar zapišemo

$$a = \lim a_n \quad \text{ali} \quad a_n \to a;\ n \to \infty.$$

Zaporedje, ki ne konvergira, je *divergentno*.

Pri konvergentnem zaporedju z limito a je neenačba

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

izpolnjena za vse indekse n od nekega n_0 dalje.

Očitno je limita konvergentnega zaporedja stekališče in to *edino* stekališče tega zaporedja. Ni pa vsako stekališče limita zaporedja: če ima zaporedje več kot eno stekališče ne more biti konvergentno — v tem primeru nobeno od stekališč ni limita.

Člene konvergentnega zaporedja si lahko predstavljamo kot zaporedje približkov za število a. Razlika $|a - a_n|$ je v tem primeru napaka, ki jo naredimo, če namesto limite a vzamemo n-ti člen zaporedja. Če zaporedje konvergira k a, lahko dosežemo, da bo ta napaka manjša od poljubnega vnaprej izbranega števila $\varepsilon > 0$, če le vzamemo dovolj pozen člen zaporedja (kar pomeni, da mora biti indeks n dovolj velik).

Primer 2.1.5. Konvergenco zaporedja lahko pokažemo direktno s pomočjo definicije:

1. V primeru 2.1.4 smo se pravzaprav prepričali, da zaporedje, dano z $a_n = 1/n$ konvergira proti številu 0.

2. Dokažimo, da ima zaporedje

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

limito 1. Izberimo $\varepsilon > 0$ in poglejmo, za katere indekse n je izpolnjena neenačba

$$|1 - a_n| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} |1 - a_n| = \frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n. \end{aligned}$$

Neenačba (2.1) je torej izpolnjena za vsak $n \geq n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor$ (tj. celi del števila $1/\varepsilon$).

Na primer, za $\varepsilon = 10^{-1}$ je $n_0 = 10$: vsi členi zaporedja od desetega dalje se razlikujejo od limite 1 za manj kot $1/10$.

3. Vzemimo zaporedje $a_n = (-1)^n n/(n+1)$ in pokažimo, da število 1 *ni* limita tega zaporedja. Naj bo $\varepsilon > 0$.

$$|1 - a_n| = \left| \frac{n + 1 - (-1)^n n}{n+1} \right| = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & n = 2k \\ \frac{2n+1}{n+1} & n = 2k+1 \end{cases}$$

Če je $\varepsilon < 1$, je ta neenačba izpolnjena samo za tiste *sode* indekse n, za katere velja $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, medtem ko obstajajo poljubno veliki lihi indeksi, za katere neenačba ni izpolnjena. ■

Lastnosti konvergentnih zaporedij

Izrek 2.1.3. *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Drugače povedano: konvergentnost zaporedja je zadosten pogoj za omejenost, omejenost zaporedja pa je potreben pogoj za konvergenco.

Dokaz. Naj bo $a = \lim a_n$. Vsi členi zaporedja razen končno mnogo so na intervalu $(a-1, a+1)$. Če levo od tega intervala ni nobenega člena, je število $a - 1$ očitno spodnja meja, če pa so kakšni členi manjši od $a - 1$, jih je le končno mnogo, najmanjši med njimi pa je spodnja meja (celo natančna spodnja meja). Na podoben način se prepričamo, da je zgornja meja zaporedja število $a+1$ ali pa največji od vseh členov in tako je izrek dokazan. □

Zaporedje, ki ni omejeno, torej ne more biti konvergentno. Prav tako zaporedje, ki ima več kot eno stekališče ne more biti konvergentno. To pa sta edina pogoja, saj velja:

Izrek 2.1.4. *Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima samo eno stekališče.*

Dokaz. Pokazati moramo le še, da je omejeno zaporedje z enim samim stekališčem vedno konvergentno. Drugače povedano: pokazati moramo, da ima omejeno divergentno zaporedje nujno več kot eno stekališče.

Naj bo (a_n) omejeno divergentno zaporedje. Ker je (a_n) omejeno, obstaja omejen interval $[m, M]$, na katerem ležijo vsi členi zaporedja $\{a_n\} \subset [m, M]$. Zaradi izreka 2.1.2 ima zaporedje vsaj eno stekališče, označimo ga z a. Zaradi divergentnosti zaporedja to stekališče ne more biti limita, zato je zunaj dovolj majhne ε-okolice neskončno členov zaporedja. To pomeni, da je vsaj na enem od intervalov, $[m, a-\varepsilon]$ ali $[a+\varepsilon, M]$ neskončno mnogo členov zaporedja, torej obstaja (spet zaradi izreka 2.1.2) vsaj še eno stekališče $b \neq a$.

Če ima omejeno zaporedje le eno stekališče, je torej nujno konvergentno. □

Naslednji kriterij za konvergenco ima to lepo lastnost, da govori samo o členih zaporedja in ne o limiti. Z njim lahko ugotovimo, ali je neko zaporedje konvergentno, ne da bi poznali njegovo limito.

Izrek 2.1.5. *Zaporedje (a_n) je konvergentno natanko takrat, kadar zadošča tako imenovanemu* Cauchyjevemu[2] pogoju:

Vsakemu pozitivnemu številu ε pripada tak indeks n_0, da je neenačba

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \tag{2.2}$$

izpolnjena za vsak $n > n_0$ in za vsako naravno število p.

Dokaz: Najprej dokažimo, da je Cauchyjev pogoj potreben za konvergenco zaporedja. Vzemimo zaporedje (a_n), ki konvergira proti limiti a, in naj bo ε poljubno pozitivno število. Ker je zaporedje konvergentno, obstaja tak indeks n_0, da je $|a - a_n| < \varepsilon/2$ za vsak $n > n_0$, torej je tudi $|a - a_{n+p}| < \varepsilon/2$ za poljuben $p \in \mathbb{N}$, saj je $n + p$ tudi večji od n_0. Ocenimo razliko

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) - (a_n - a)| \leq |a_{n+p} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

in vidimo, da zaporedje zadošča Cauchyjevemu pogoju.

Dokažimo še, da je Cauchyjev pogoj zadosten za konvergenco. Naj zaporedje (a_n) zadošča Cauchyjevemu pogoju. Izberimo si $\varepsilon = 1$ in določimo indeks r tako, da bo za vsak $p \in \mathbb{N}$ izpolnjena neenačba $|a_{r+p} - a_r| < 1$, kar pomeni, da vsi členi zaporedja z indeksom večjim od r ležijo na intervalu $(a_r - 1, a_r + 1)$. Zaporedje (a_n) je torej omejeno in ima zaradi izreka 2.1.2 vsaj eno stekališče a. Pokazali bomo, da je $a = \lim a_n$

[2] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), francoski matematik, začetnik teorije kompleksnih funkcij.

Vzemimo poljubno pozitivno število ε. Zaradi Cauchyjevega pogoja obstaja tak indeks n, da je $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon/2$ za vsak $p \in \mathbb{N}$. Vsi členi a_m za $m > n$ so na intervalu $(a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2)$, torej leži stekališče a na zaprtem intervalu $[a_n - \varepsilon/2, a_n + \varepsilon/2]$. Ker je razlika dveh števil s tega intervala manjša od ε, velja za vsak $m > n$ ocena $|a - a_m| < \varepsilon$, kar že pomeni, da je a limita, torej je zaporedje (a_n) res konvergentno. □

Primer 2.1.6. Dokažimo, da zaporedje, ki je dano z dvočlensko rekurzijo

$$a_1 = \alpha, \quad a_2 = \beta, \quad a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$$

zadošča Cauchyjevemu pogoju in je zato konvergentno.

Razlika dveh zaporednih členov je

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1}).$$

Od tod sledi:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - a_{n+1}| = \frac{1}{2^2}|a_{n-1} - a_n| = \cdots$$

$$\cdots = \frac{1}{2^n}|a_2 - a_1| = \frac{1}{2^n}|\beta - \alpha|.$$

Potem je

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &= |(a_{n+p} - a_{n+p-1}) + (a_{n+p-1} - a_{n+p-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)| \\
&\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{n+p-2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) |\beta - \alpha| \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^p}{1 - \frac{1}{2}} \cdot |\beta - \alpha| < \frac{1}{2^{n-2}} \cdot |\beta - \alpha|.
\end{aligned}$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ in izberimo N tako velik, da bo

$$\frac{1}{2^{N-2}} < \frac{\varepsilon}{|\beta - \alpha|}.$$

Potem je za vsak $n > N$ in za vsak $p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+p} - a_n| \leq \frac{1}{2^{N-2}} \cdot |\beta - \alpha| < \varepsilon.$$

Zaporedje a_n je torej konvergentno, ker zadošča Cauchyjevemu pogoju. ■

Divergentna zaporedja

Zaporedje, ki ni konvergentno, je divergentno. Na primer, vsako neomejeno zaporedje je divergentno. Tudi vsako zaporedje z več kot enim stekališčem je divergentno.

Če so členi zaporedja čedalje večji in rastejo proti neskončnosti, pravimo, da zaporedje *divergira proti* ∞. Natančneje:

Definicija 2.1.4. Če za vsako pozitivno število M obstaja tak indeks n_0, da je $a_n > M$, če je $n \geq n_0$, pravimo, da zaporedje a_n *divergira proti neskončnosti* in napišemo

$$\lim a_n = \infty$$

Podobno, zaporedje *divergira proti* $-\infty$:

$$\lim a_n = -\infty,$$

če za vsako pozitivno število A obstaja tak indeks n_0, da je $a_n < -A$, če je $n > n_0$.

Zaporedje, ki divergira proti ∞ ali proti $-\infty$, ne more imeti stekališč. Seveda ni nujno, da divergentno zaporedje divergira proti ∞ ali proti $-\infty$.

Primer 2.1.7. Nekaj divergentnih zaporedij:

1. Zaporedje (n) divergira proti ∞, saj za poljuben $M > 0$ lahko vzamemo $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1$.

2. Tudi zaporedje $(\log n)$ divergira proti ∞, saj za poljuben $M > 0$ lahko vzamemo $n_0 = \lfloor e^M \rfloor + 1$.

3. Zaporedje $(\sin n)$ je divergentno, vendar je omejeno, zato ne divergira proti ∞. ■

Lastnosti limite zaporedja

Konvergentnost je lastnost, ki je odvisna le od zelo poznih členov zaporedja, začetni členi pa nanjo ne vplivajo. Očitno ostane konvergentno zaporedje konvergentno z isto limito, če mu dodamo ali odvzamemo končno mnogo členov.

Trditev 2.1.6. *Če imata zaporedji* (a_n) *in* (b_n) *isto limito,*

$$\lim a_n = \lim b_n = l,$$

in je zaporedje (c_n) *med njima, tako da je*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ za vsak } n,$$

je tudi

$$\lim c_n = l.$$

Dokaz: Ker je l limita zaporedij (a_n) in (b_n), obstajata za vsak ε taka n_1 in n_2, da velja

$$\begin{aligned} a_n &\in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \text{ za } n > n_1, \\ b_n &\in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \text{ za } n > n_2. \end{aligned}$$

Če je n_0 večje ob števil n_1 in n_2, veljata za vsak $n > n_0$ oba pogoja hkrati, torej

$$l - \varepsilon < a_n < c_n < b_n < l + \varepsilon,$$

tako da je c_n za vsak $n > n_0$ v ε-okolici limite l. □

Preprosta posledica trditve 2.1.6 je tale sklep: če za zaporedje (a_n) velja $a_n < b$ za vsak n in $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, je tudi $a \leq b$. Na primer, limita zaporedja s pozitivnimi členi je nenegativna.

Trditev 2.1.7. *Če sta zaporedji* (a_n) *in* (b_n) *konvergentni,* $\lim a_n = a$ *in* $\lim b_n = b$, *potem so konvergentna tudi zaporedja*

$$\begin{aligned} (a_n + b_n) &= a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots \\ (a_n - b_n) &= a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots \\ (a_n \cdot b_n) &= a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots. \end{aligned}$$

in velja:

$$\begin{aligned} \lim(a_n + b_n) &= \lim a_n + \lim b_n \\ \lim(a_n - b_n) &= \lim a_n - \lim b_n \\ \lim(a_n b_n) &= \lim a_n \cdot \lim b_n. \end{aligned}$$

Dokaz: Izberimo pozitivno število ε. Ker sta zaporedji (a_n) in (b_n) konvergentni, obstajata naravni števili n_a in n_b, da je $|a_n - a| < \varepsilon/2$ za vsak $n > n_a$ in $|b_n - b| < \varepsilon/2$ za vsak $n > n_b$. Če za n_0 vzamemo večje izmed števil n_a in n_b, za vsak $n > n_0$ velja

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

torej zaporedje (a_n+b_n) res konvergira proti limiti $a+b$. Podobno dokažemo, da je limita razlike enaka razliki limit.

Poglejmo še limito produkta. Produkt a_nb_n zapišemo v obliki

$$a_nb_n = (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a) + ab.$$

Tako je

$$|a_nb_n - ab| \leq |a_n - a| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|.$$

Recimo, da je η pozitivno število manjše od 1. Če je n dovolj velik, je $|a_n - a| < \eta$ in $|b_n - b| < \eta$. Za tak n je

$$|a_nb_n - ab| < \eta^2 + \eta(|a| + |b|) < \eta(|a| + |b| + 1).$$

Naj bo ε poljubno pozitivno število manjše od 1. Če si izberemo

$$\eta = \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1},$$

je za dovolj velike indekse n izpolnjena neenačba $|a_nb_n - ab| < \varepsilon$, torej zaporedje (a_nb_n) res konvergira proti ab. □

Trditev 2.1.8. *Če je $a_n \neq 0$ za vsak n in če zaporedje (a_n) konvergira proti $a \neq 0$, konvergira tudi zaporedje $(1/a_n)$ in je*

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

Dokaz: Naj bo ε poljubno pozitivno število, in η pozitivno število, ki je manjše od $|a|/2$ in od $\varepsilon|a|^2/2$. Ker je a limita zaporedja (a_n), je za vsak dovolj velik indeks n izpolnjena neenačba $|a_n - a| < \eta$. Za tak n je $|a_n| = |a + (a_n - a)| \geq |a| - |a_n - a| > |a|/2$, zato je tudi

$$|a_n^{-1} - a^{-1}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n a|} < \frac{2\eta}{|a|^2}.$$

Ker smo izbrali $\eta < \varepsilon |a|^2/2$, je torej

$$|a_n^{-1} - a^{-1}| < \varepsilon$$

za vsak dovolj velik n, torej zaporedje $(1/a_n)$ konvergira proti $1/a$. □

Iz zadnjih dveh trditev sledi še:

Trditev 2.1.9. *Če zaporedje (a_n) konvergira proti limiti a in zaporedje (b_n), kjer so $b_n \neq 0$za vsak n, konvergira proti $b \neq 0$, konvergira zaporedje kvocientov (a_n/b_n) proti a/b.*

Primer 2.1.8. Oglejmo si zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^2 + 3n}{2n^2 - 1}.$$

Če števec in imenovalec delimo z n^2, dobimo

$$\lim a_n = \lim \frac{1 + 3/n}{2 - 1/n^2} = \frac{1 + 3 \lim \frac{1}{n}}{2 - \lim \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

saj zaporedji $(3/n)$ in $(1/n^2)$ očitno konvergirata proti 0.

Splošneje: če je a_n kvocient dveh polinomov in $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$, potem je

$$\lim a_n = \lim \frac{\alpha_0 n^k + \ldots + \alpha_{k-1} n + \alpha_k}{\beta_0 n^l + \ldots + \beta_{l-1} n + \beta_l} = \begin{cases} 0 & \text{če je} \quad k < l \\ \dfrac{\alpha_0}{\beta_0} & \text{če je} \quad k = l \\ \pm\infty & \text{če je} \quad k > l \end{cases}.$$

■

2.1.3 Monotona zaporedja

Definicija 2.1.5. Zaporedje (a_n) je *naraščajoče*, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq a_{n+1}$. Če za vsak n velja $a_n < a_{n+1}$, je zaporedje *strogo naraščajoče*. Zaporedje (a_n) je *padajoče*, če za vsako naravno število n velja $a_n \geq a_{n+1}$. Če za vsak n velja $a_n > a_{n+1}$, je zaporedje *strogo padajoče*. Zaporedje je *monotono*, če je naraščajoče ali padajoče.

Monotona zaporedja so vsaj z ene strani omejena. Vsako naraščajoče zaporedje (a_n) je navzdol omejeno in $\inf a_n = a_1$, vsako padajoče zaporedje (b_n) pa je navzgor omejeno in $\sup b_n = b_1$.

Poleg tega velja:

Izrek 2.1.10. *Naraščajoče zaporedje, ki je navzgor omejeno, konvergira proti* $\lim a_n = \sup a_n$. *Naraščajoče zaporedje, ki ni navzgor omejeno, pa divergira proti* ∞.

Podobno, padajoče zaporedje, ki je navzdol omejeno, konvergira proti $\lim a_n = \inf a_n$. *Padajoče zaporedje, ki ni navzdol omejeno, pa divergira proti* $-\infty$.

Dokaz: Naj bo (a_n) naraščajoče zaporedje in M njegova natančna zgornja meja. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je M natančna zgornja meja zaporedja, je $a_n \leq M$ za vsak n in $a_k > M - \varepsilon$ za vsaj en člen a_k. Ker je zaporedje monotono naraščajoče, je $a_n > M - \varepsilon$ tudi za vsak $n > k$, zato so v ε-okolici točke M vsi členi od k-tega dalje, torej je

$$\lim a_n = M.$$

Če zaporedje ni navzgor omejeno, obstaja za vsak $A > 0$ kakšen člen a_{n_0}, za katerega velja $a_{n_0} > A$. Ker je zaporedje monotono, je $a_m \geq a_{n_0} > A$ za vsak $m > n_0$, torej je

$$\lim a_n = \infty.$$

Dokaz trditve za padajoče zaporedje je podoben. □

Primer 2.1.9. **Zaporedje približkov za število** $\sqrt{2}$. Naj bo

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

Pokažimo, da je dano zaporedje padajoče in navzdol omejeno, torej konvergentno.

1. Da je zaporedje omejeno navzdol, je očitno, saj je $a_n > 0$ za vsak n. Spodnjo mejo 0 lahko precej dvignemo, saj velja:

$$2a_{n+1}a_n = a_n^2 + 2,$$

$$a_{n+1}^2 = (a_n - a_{n+1})^2 + 2 \geq 2,$$

odtod

$$a_{n+1} \geq \sqrt{2} \quad \text{za vsak } n.$$

Torej je tudi $\sqrt{2}$ spodnja meja zaporedja.

2. Pokažimo še, da je zaporedje monotono padajoče:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \\ &= \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} \geq 0, \end{aligned}$$

ker je $a_n^2 \geq 2$ za vsak n.

3. Zaporedje a_n je torej konvergentno. Naj bo $\lim a_n = l$. Očitno mora biti $l \geq \sqrt{2} > 0$. Poleg tega iz enakosti $a_{n+1} = (a_n/2 + 1/a_n)$ sledi

$$l = \lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right).$$

Če to enačbo rešimo, dobimo $l = \pm\sqrt{2}$. Ker mora biti $l > 0$, je

$$l = \lim a_n = \sqrt{2},$$

torej je a_n res zaporedje približkov za število $\sqrt{2}$.

Če zapišemo prvih nekaj členov zaporedja,

$$2,\ 1.5,\ 1.41\bar{6},\ 1.41421568628,\ 1.41421356238,\ \ldots,$$

se prepričamo, da se že člen a_5 od prave vrednosti $\sqrt{2}$ razlikuje za manj kot 10^{-10}. ∎

2.1.4 Potence z realnimi eksponenti

Zaporedje potenc. Naj bo c poljubno naravno število. Oglejmo si zaporedje potenc (c^n).

Trditev 2.1.11. *Zaporedje (c^n) je konvergentno, če je $c \in (-1, 1]$. Natančneje:*

$$\lim c^n = \begin{cases} \infty, & \text{če je} \quad c > 1 \\ 1, & \text{če je} \quad c = 1 \\ 0, & \text{če je} \quad |c| < 1 \end{cases}.$$

Če je $c \leq -1$, zaporedje ni konvergentno.

Dokaz. Naj bo najprej $c > 1$. Potem je $c = 1 + x$, kjer je $x > 0$ in

$$c^n = (1+x)^n$$

Po *binomski formuli* je

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \ldots + x^n.$$

Vsi členi v tej vsoti so pozitivni, zato je cela vsota gotovo večja od prvih dveh členov:

$$c^n = (1+x)^n > 1 + nx. \tag{2.3}$$

Zaporedje $(1 + nx)$ je naraščajoče in ni omejeno, kar sledi iz Arhimedove lastnosti realnih števil (izrek 1.2.5), torej je $\lim c^n = \infty$.

Za $c = 1$ je trditev očitna, saj so vsi členi enaki $1^n = 1$.

Naj bo $|c| < 1$. Zaporedje $(|c^n|)$ je padajoče in navzdol omejeno, torej konvergira k nekemu številu $\alpha \geq 0$. To pomeni, da zaporedje sodih potenc (c^{2n}) konvergira proti α, zaporedje lihih potenc (c^{2n+1}) pa k α ali k $-\alpha$, glede na predznak števila c. Zaporedje (c^n) ima tako največ dve stekališči: α in $-\alpha$. Iz rekurzivne formule $|c^n| = |c| \cdot |c^{n-1}|$ sledi, da je

$$\lim |c^n| = |c| \cdot \lim |c^{n-1}|,$$

torej $\alpha = |c|\alpha$, to pomeni, da je $\alpha = 0$. Zaporedje (c^n) je omejeno in ima v vsakem primeru eno samo stekališče $\alpha = -\alpha = 0$, ki je njegova limita.

Če je $c = -1$ ima zaporedje $((-1)^n)$ dve stekališči, zato ni konvergentno. Če pa je $c < -1$, je zaporedje c^n v obe smeri neomejeno, in je tudi divergentno. $\square$

Zaporedje korenov. Vzemimo pozitivno realno število $c > 0$ in si oglejmo zaporedje korenov $(c^{1/n}) = (\sqrt[n]{c})$.

Trditev 2.1.12. *Za vsak $c > 0$ je zaporedje $(c^{1/n})$ konvergentno z limito*

$$\lim c^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{2.4}$$

Dokaz. Naj bo najprej $c > 1$, tako je $c = 1 + nx$, kjer smo pisali $x = (c-1)/n > 0$. Iz enačbe (2.3) sledi

$$(1+x)^n > 1 + nx = 1 + n\frac{c-1}{n} = c.$$

Obe strani korenimo in dobimo $\sqrt[n]{c} < 1 + (c-1)/n$. Ker je $c > 1$, je tudi $\sqrt[n]{c} > 1$ in velja za vsak n ocena

$$1 < \sqrt[n]{c} < 1 + \frac{c-1}{n}.$$

Ker je $\lim(1 + (c-1)/n) = 1$, sledi (po trditvi 2.1.6), da je $\lim \sqrt[n]{c} = 1$.

Za $c = 1$ je veljavnost relacije očitna. Če pa je $c < 1$, obstaja tak $b > 1$, da je $c = 1/b$ in $\sqrt[n]{c} = 1/\sqrt[n]{b}$, torej je

$$\lim \sqrt[n]{c} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{b}} = 1.$$

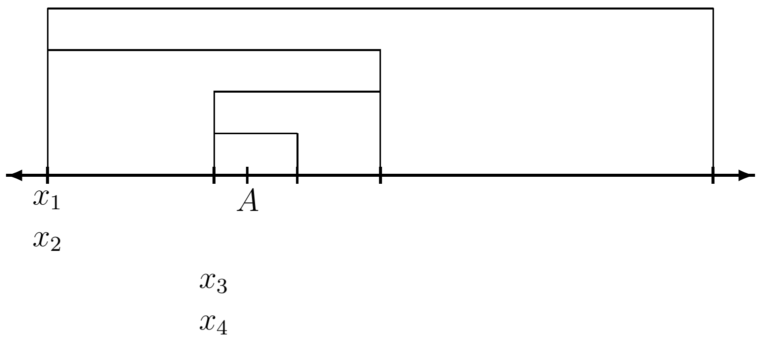
□

V razdelku 1.2.4 smo za $a > 0$ potenco a^r definirali za poljuben racionalen eksponent r. Da bi lahko definirali potenco tudi za iracionalne eksponente, potrebujemo naslednji rezultat:

Izrek 2.1.13. *Za vsako realno število x obstaja zaporedje racionalnih števil (x_n), ki konvergira k x:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Dokaz. Naj bo x_1 največje celo število, ki ni večje od x. Tako je gotovo $x \in [x_1, x_1+1)$. Če je x v levi polovici tega intervala: $x < x_1 + 1/2$, izberemo $x_2 = x_1$, sicer pa $x_2 = x_1 + 1/2$. Število x tako gotovo leži na intervalu $[x_2, x_2 + 1/2)$. Ta interval spet razpolovimo in izberemo za x_3 levo krajišče tistega podintervala, na katerem se nahaja x. Tako nadaljujemo, dokler ne



Slika 2.1: Konstrukcija racionalnega zaporedja, ki konvergira proti realnemu številu A

dobimo monotono naraščajočega omejenega zaporedja (x_n). Za tako dobljeno zaporedje je $x - x_n < 2^{1-n}$, kar je poljubno blizu 0, če je le n dovolj velik.□

Naj bo r poljubno realno število in (r_n) zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti r. Izberimo poljubno število $c > 0$ in konstruirajmo zaporedje

$$a_n = c^{r_n}; \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Pokažimo, da zaporedje (a_n) zadošča Cauchyjevemu pogoju. Razlika

$$|a_{n+p} - a_n| = |c^{r_{n+p}} - c^{r_n}| = |c^{r_n}| \cdot |c^{r_{n+p}-r_n} - 1|$$

postane pri dovolj velikem n za vsak p poljubno majhna, saj je vrednost prvega faktorja omejena, v drugem faktorju pa gre z rastočim n razlika $r_{n+p} - r_n$ proti 0, zato tudi ves faktor konvergira proti 0. Zaporedje (a_n) je konvergentno. Izkaže se, da je za vsako zaporedje (r_n), ki konvergira proti r, limita zaporedja (c^{r_n}) vedno isto število. To limito vzamemo za vrednost potence c^r:

Definicija 2.1.6. Naj bo $c > 0$. Potem je

$$c^r = c^{\lim r_n} = \lim c^{r_n}.$$

Vsa običajna pravila običajna pravila za računanje s potencami veljajo tudi za potence z realnim eksponentom.

Konstrukcija števila e. Vzemimo zaporedji

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{in} \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}. \tag{2.5}$$

Pokazali bomo, da sta obe zaporedji konvergentni in imata isto limito.

V dokazu bomo potrebovali naslednjo neenakost:

Lema 2.1.14. *Za vsak $x \in (0,1)$ in za vsak $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > 1$, velja:*

$$(1 - x)^m > 1 - mx. \tag{2.6}$$

Dokaz leme. Za eksponente $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ si lahko pomagamo z indukcijo:

1. Če je $m = 2$, je očitno

$$(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 > 1 - 2x.$$

2. Iz indukcijske predpostavke

$$(1 - x)^m > 1 - mx$$

sledi

$$\begin{aligned}(1 - x)^{m+1} &= (1 - x)^m (1 - x) > (1 - mx)(1 - x) \\ &= 1 - (m + 1)x + mx^2 > 1 - (m + 1)x\end{aligned}$$

in lema je dokazana za $m \geq 2$.

Če je $m = -n \leq -2$, $n \in \mathbb{N}$, pa iz neenačbe

$$(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2 < 1$$

sledi

$$1 + x < \frac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1},$$

torej je

$$(1 - x)^m = (1 - x)^{-n} > (1 + x)^n > 1 + nx = 1 - mx$$

in neenačba je dokazana tudi v tem primeru. □

Trditev 2.1.15. *Zaporedje*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

je naraščajoče, zaporedje

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad n \geq 2$$

pa je padajoče.

Dokaz. V neenačbi (2.6) izberimo $m = n$ in $x = 1/n^2$:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}.$$

Obe strani delimo z $(1 - 1/n)^n$ in dobimo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-(1-n)} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}. \tag{2.7}$$

Na levi strani je a_n, na desni pa a_{n-1}, torej $a_n > a_{n-1}$, zaporedje (a_n) je torej naraščajoče. Ker ocena (2.7) velja tudi za $n \leq -2$, lahko zapišemo še

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)},$$

kar je isto kot $b_{n+1} < b_n$. To pa pomeni, da je zaporedje (b_n) padajoče. □

Trditev 2.1.16. *Zaporedje (a_n) je navzgor, zaporedje (b_n) pa navzdol omejeno.*

Dokaz. Zaradi

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n, \end{aligned}$$

je za vsak $n \geq 2$

$$a_n < b_{n+1} \leq b_2 = 4 \quad \text{in} \quad b_n > a_{n-1} \geq a_1 = 2.$$

Tako je 4 zgornja meja zaporedja (a_n) in 2 spodnja meja zaporedja (b_n). Obe zaporedji sta zato monotoni in omejeni, torej konvergentni. $\square$

Trditev 2.1.17. *Zaporedji (a_n) in (b_n) imata isto limito, ki jo označimo z e.*

Dokaz. Iz zveze $b_{n+1} = a_n(1 + 1/n)$ sledi,

$$\lim b_{n+1} = \lim a_n \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim a_n,$$

torej imata isto limito, ki jo bomo označili z e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

$\square$

Število e je iracionalno število, ki ga bomo še pogosto srečali. Zaokroženo na dvanajst decimalk je

$$e = 2.718\,281\,828\,459.$$

Primer 2.1.10. Določimo limito zaporedja s splošnim členom $(1 - 5/n)^n$!

Naj bo $m = n/5$, torej $n = 5m$. Potem je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{5m}$$
$$= \lim_{m\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}\right]^{-5} = e^{-5}.$$

$\blacksquare$

2.1.5 Logaritmi

Ko smo iskali obrat relacije $A = a^n$ pri fiksnem eksponentu, smo prišli do definicije korena: $a = \sqrt[n]{A}$. Če pa na to relacijo gledamo pri spremenljivem eksponentu in konstantni osnovi, je njen obrat logaritem.

Definicija 2.1.7. *Logaritem* števila $A > 0$ pri osnovi $a > 0$, $a \neq 1$ je število, s katerim moramo potencirati osnovo a, da dobimo A.

$$x = \log_a A \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = A.$$

Število A imenujemo *logaritmand*, število a pa *osnovo*.

Definicija logaritma je smiselna samo, če je osnova $a > 0$ in $a \neq 1$. Če sta a in A pozitivni števili, se lahko na podoben način, kot smo dokazali izrek 1.2.8 o obstoju korena, prepričamo, da obstaja natanko določeno število $x = \log_a A$. Zlahka se prepričamo, da za vsak $a > 0$, $a \neq 1$ velja

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{in} \quad \log_a a = 1.$$

Prvo enačbo dobimo iz $a^0 = 1$, drugo iz $a^1 = a$.

Iz zakonov za računanje s potencami lahko izpeljemo naslednja pravila za računanje z logaritmi:

$$\begin{aligned} \log_a(AB) &= \log_a A + \log_a B; \\ \log_a \frac{A}{B} &= \log_a A - \log_a B; \\ \log_a A^r &= r \log_a A. \end{aligned}$$

Če sta a in b različni osnovi, je

$$\log_a A = \log_a b \cdot \log_b A = \frac{\log_b A}{\log_b a}.$$

V matematiki največ uporabljamo logaritme, ki imajo za osnovo število e. Pravimo jim tudi *naravni logaritmi*, številu e pa *osnova naravnih logaritmov*. Naravne logaritme zato pišemo brez osnove, včasih pa uporabljamo tudi oznako ln. Tako je torej $\log_e A$ isto kot $\log A$ ali pa $\ln A$. Poleg naravnega logaritma se, zlasti v tehniki, pogosto uporablja logaritem z osnovo 10, $\lg A = \log_{10} A$, ki mu pravimo *desetiški* ali *Briggsov* logaritem, in v računalništvu logaritem z osnovo 2, $\operatorname{lb} A = \log_2 A$, ali *dvojiški logaritem*.

2.2 Številske vrste

2.2.1 Konvergenca vrst

Definicija 2.2.1. Če je dano zaporedje (a_n), je s predpisom

$$S_1 = a_1,\ S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

določeno *zaporedje delnih vsot vrste s členi* a_n, ki jo označimo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \tag{2.8}$$

Če zaporedje delnih vsot S_n konvergira proti številu s, pravimo, da je vrsta (2.8) *konvergentna* in da je njena *vsota* enaka s, kar zapišemo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Če je zaporedje delnih vsot divergentno, je vrsta divergentna in nima vsote.

Primer 2.2.1. Naj bo $c \in \mathbb{R}$. Vrsti

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n$$

pravimo *geomtrijska vrsta* s kvocientom c. Za zaporedje delnih vsot geometrijske vrste velja:

$$S_{n+1} - 1 = (1 + c + \cdots + c^{n+1}) - 1 = c + \cdots + c^{n+1} = cS_n$$

in

$$S_{n+1} = S_n + c^{n+1} = cS_n + 1,$$

zato je za $c \neq 1$

$$S_n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

To zaporedje je konvergentno samo, če je $|c| < 1$ (trditev 2.1.11). V tem primeru je

$$\lim S_n = \lim \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} = \frac{1}{1 - c}.$$

■

Primer 2.2.2. Poiščimo vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Člene te vrste lahko razstavimo na parcialne ulomke:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

zato je

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n+1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim S_N = 1.$$

■

Iz Cauchyjevega pogoja (2.2) za konvergenco zaporedja delnih vsot sledi

Izrek 2.2.1. *Vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

je konvergentna natanko takrat, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ *obstaja tak indeks* n_0*, da je*

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

za vsak $p \in \mathbb{N}$*, če je le* $n > n_0$*.*

Drugače povedano: če je vrsta konvergentna, lahko izračunamo njeno vsoto poljubno natančno, če le seštejemo dovolj njenih začetnih členov — vsota preostalih neskončno mnogo členov bo manjša od predpisane napake.

Primer 2.2.3. Vrsto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
imenujemo *harmonična vrsta.* Pokažimo, da harmonična vrsta ni konvergentna. Če bi bila konvergentna, bi po Cauchyjevem kriteriju za vsak $\varepsilon > 0$ obstajal tak indeks n_0, da bi veljalo
$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$
za vsak $n \geq n_0$ in za vsak p. Vendar, če izberemo poljuben n in $p = n$, je
$$a_{n+1} + \cdots + a_{2n} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$
to pa ni poljubno majhno število. ■

Izrek 2.2.2. *[Potreben pogoj za konvergenco]Če je vrsta konvergentna, konvergira zaporedje njenih členov proti* 0*.*

Dokaz. Naj bo
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n.$$
Očitno velja
$$a_n = S_n - S_{n-1},$$
torej
$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$
in izrek je dokazan. ■

Pogoj $\lim a_n = 0$ je potreben za konvergenco vrste, ni pa zadosten, saj harmonična vrsta temu pogoju zadošča, pa kljub temu ni konvergentna.

2.2.2 Vrste s pozitivnimi členi

Če so vsi členi $a_n > 0$, je zaporedje delnih vsot vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
naraščajoče in je konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno. Če ni omejeno, pa divergira proti ∞.

Primer 2.2.4. Naj bo $p > 1$. Pokažimo, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergentna.

Pokazali bomo, da je zaporedje delnih vsot

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p}$$

navzgor omejeno. Za vsak $N > 1$ je

$$\begin{aligned}
S_N &< S_{2^N-1} \\
&= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^N-1)^p} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{(N-1)p}} + \cdots + \frac{1}{(2^N-1)^p}\right) \\
&\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{(N-1)p}} + \cdots + \frac{1}{2^{(N-1)p}}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{2^p} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^{(N-1)p}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{N-1},
\end{aligned}$$

to je $(N-1)$-va delna vsota geometrijske vrste s kvocientom $q = 1/2^{p-1}$. Ker je $p > 1$, je $q < 1$ in geometrijska vrsta je konvergentna, delna vsota pa je manjša od vsote cele vrste, torej

$$S_N < \frac{1}{1 - (1/2^{p-1})},$$

kar je zgornja meja za zaporedje delnih vsot S_N. ∎

Ugotavljanje konvergence vrste s pozitivnimi členi je precej bolj preprosto, ker je zaporedje delnih vsot take vrste monotono naraščajoče, in poznamo celo vrsto kriterijev, s katerimi si lahko pomagamo. Navedli bomo dva.

Izrek 2.2.3. *[Primerjalni kriterij] Če sta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad in \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

vrsti s pozitivnimi členi in je $a_n \leq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, velja:

$$\text{če je } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergentna, je tudi } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergentna,}$$

ali drugače povedano,

$$\text{če je } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergentna, je tudi } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergentna.}$$

Dokaz. Za zaporedji delnih vsot

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{in} \quad S_n' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

očitno velja $S_n \leq S_n'$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, je zaporedje (S_n') omejeno, torej je omejeno tudi zaporedje (S_n). Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, je zaporedje (S_n) neomejeno, torej je tudi večje zaporedje (S_n') neomejeno. □

Primer 2.2.5. V primeru 2.2.3 smo dokazali, da harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ni konvergentna. Za vsak $p < 1$ je $1/n^p > 1/n$ in primerjalni kriterij pove, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

divergentna za vsak $p \leq 1$. ■

Zaporedje kvocientov

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ldots$$

meri hitrost naraščanja členov vrste. Geometrijska vrsta s pozitivnimi členi (pri njej so ti kvocienti konstantni), konvergira, če je ta konstanta manjša kot 1. Podobno velja tudi za splošne vrste:

Izrek 2.2.4. *[Kvocientni kriterij] Če obstaja*

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(ki je lahko tudi ∞), velja: vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če je $L < 1$ in divergira, če je $L > 1$.

Dokaz. Recimo, da je $L < 1$ in naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da je $L+\varepsilon < 1$. Potem obstajati tak indeks n_0, da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon < 1.$$

Na konvergenco vrste, podobno kot na konvergenco zaporedja, ne vpliva, če na začetku vrste nekaj členov dodamo ali odvzamemo. Prvih n_0 členov lahko izpustimo, tako da dobimo vrsto, kjer velja neenakost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon < 1 \quad \text{za vsak } n.$$

Potem je

$$a_2 \leq (L+\varepsilon) \cdot a_1 \quad \text{in} \quad a_n \leq (L+\varepsilon)^{n-1} a_1.$$

Ker je geometrijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_1(L+\varepsilon)^n$ konvergentna, sledi iz primerjalnega kriterija, da je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

Če je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \quad \text{je} \quad a_{n+1} > a_n$$

in je zaporedje členov (a_n) naraščajoče zaporedje pozitivnih števil in $\lim a_n \neq 0$. Potrebni pogoj za konvergenco vrste tako ni izpolnjen. $\square$

V primeru, ko je $\lim(a_{n+1}/a_n) = 1$, kvocientni kriterij na vprašanje o konvergenci vrste ne da odgovora.

Primer 2.2.6. Zgled za uporabo kvocientnega kriterija

1. Za vrsto
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
velja
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \lim \frac{2}{n+1} = 0,$$
in vrsta je konvergentna.

2. Za vrsti
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
velja (kot se prepričamo s kratkim računom):
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$
Prva je divergentna, druga pa konvergentna, torej v tem primeru kvocientni kriterij res ne da odgovora o konvergenci. ∎

Če je vrsta konvergentna, je N-ta delna vsota
$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$
približek za vsoto vrste S, napaka pa je enaka *ostanku vrste*
$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Metodo, s pomočjo katere smo izpeljali kvocientni kriterij, lahko uporabimo tudi za oceno ostanka. Če vemo, da je za vsak $n \geq N$
$$m \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M,$$
kjer sta števili m in M pozitivni in manjši od 1, sledi
$$a_n m \leq a_{n+1} \leq a_n M,$$
kar pomeni, da je
$$a_N(m + m^2 + \cdots) \leq a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots \leq a_N(M + M^2 + \cdots).$$
Od tod dobimo oceno za ostanek
$$a_N \frac{m}{1-m} \leq R_N \leq a_N \frac{M}{1-M}.$$

2.2.3 Absolutna in pogojna konvergenca vrst

Če so členi vrste poljubna števila (pozitivna ali negativna), ločimo dva tipa konvergence:

Definicija 2.2.2. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ in *pogojno konvergentna*, če je konvergentna, pa ni absolutno konvergentna.

Vrsta je torej absolutno konvergentna, če je konvergentna vrsta iz absolutnih vrednosti njenih členov, to pa je vrsta s pozitivnimi členi. Pri ugotavljanju absolutne konvergence si torej lahko pomagamo s kriteriji za konvergenco vrst s pozitivnimi členi.

Izrek 2.2.5. *Absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. Če je vrsta absolutno konvergentna, je za zaporedje delnih vsot

$$S'_N = |a_1| + \cdots + |a_N|$$

izpolnjen Cauchyjev pogoj (izrek 2.2.1) in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da za poljuben $p \in \mathbb{N}$ velja

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon,$$

če je le $n \geq n_0$. Potem je tudi

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

za vsak $n \geq n_0$. Očitno tudi zaporedje delnih vsot

$$S_N = a_1 + \cdots + a_N$$

zadošča Cauchyjevemu pogoju in zato je vrsta konvergentna. □

Obratno seveda ni res, saj bomo kmalu spoznali kakšno pogojno konvergentno vrsto.

Izrek 2.2.6. Leibnizov[3] kriterij *Če je* (a_n) *padajoče zaporedje pozitivnih števil in* $\lim a_n = 0$*, je vrsta*

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

konvergentna.

[3]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), nemški filozof in matematik, skupaj z I. Newtonom začetnik diferencialnega in integralnega računa.

Vrstam, kjer se predznaki členov izmenjujejo, (kot je ta v izreku), pravimo *alternirajoče vrste.*

Dokaz. Ker je zaporedje (a_n) padajoče, za vsak N velja

$$S_{2N} \geq 0 \quad \text{in} \quad S_{2N+2} = S_{2N} + (a_{2N+1} - a_{2N+2}) \geq S_{2N}.$$

Po drugi strani je

$$S_{2N} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - a_{2N} < a_1.$$

Zaporedje sodih delnih vsot S_{2N} je naraščajoče in navzgor omejeno, ter zato konvergentno. Za lihe delne vsote velja

$$S_{2N+1} = (a_1 - a_2 + \cdots + a_{2N-1}) - (a_{2N} - a_{2N+1}) \leq S_{2N-1},$$

zato je zaporedje lihih delnih vsot padajoče. Poleg tega je

$$S_{2N+1} = S_{2N} + a_{2N+1} \geq S_{2N} \geq S_2,$$

torej so lihe delne vsote omejene navzdol in zato je zaporedje (S_{2N+1}) konverentno.

Ker je

$$\lim S_{2N+1} - \lim S_{2N} = \lim(S_{2N+1} - S_{2N}) = \lim a_{2N+1} = 0,$$

imata zaporedji S_{2N+1} in S_{2N} isto limito. Zaporedje (S_N) je omejeno in ima eno samo stekališče, torej je konvergentno. To pomeni, da tudi vrsta konvergira. □

Primer 2.2.7. Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \tag{2.9}$$

zadošča pogojem zgornjega izreka, zato je konvergentna. Vrsta absolutnih vrednosti njenih členov je harmonična vrsta, ki je divergentna, zato vrsta (2.9) konvergira pogojno.

Podobno velja za vse vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \quad 0 < p \leq 1.$$

■

Spomnimo se primerov 2.2.4 in 2.2.5 in povzemimo:

Trditev 2.2.7. *Alternirajoča vrsta*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p} \quad \textit{je} \quad \begin{cases} \textit{absolutno konvergentna} & \textit{za} \quad p > 1 \\ \textit{pogojno konvergentna} & \textit{za} \quad 0 < p \le 1 \\ \textit{divergentna} & \textit{za} \quad p \le 0 \end{cases} .$$

Vrste so pravzaprav "neskončne vsote", vendar vseh lastnosti "končnih vsot" nimajo. Za končne vsote velja komutativnost — vrstni red členov na vsoto ne vpliva, za neskončne vrste pa v splošnem komutativnost ne velja.

Primer 2.2.8. Naj bo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Očitno je

$$S = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots \ge \frac{1}{2},$$

zato je $S \neq 0$. Zapišimo člene te vrste v drugačnem vrstnem redu:

$$\begin{aligned} S' &= \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots \end{aligned}$$

Če upoštevamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n} &= \left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right), \end{aligned}$$

dobimo

$$S' = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Ker je $S \neq 0$, je $S' = S/2 \neq S$. Torej smo z zamenjavo vrstnega reda členov dosegli, da se je vsota vrste spremenila. ■

To je mogoče samo, če je vrsta pogojno konvergentna (tako kot v našem primeru), saj velja:

Izrek 2.2.8. *Poljubni absolutno konvergentni vrsti z istimi členi, vendar v drugačnem vrstnem redu, imata enako vsoto.*

Dokaz izreka 2.2.8 najdemo v [8].

Poglavje 3

Funkcije

3.1 Osnovni pojmi

Preslikavam v množico $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ običajno pravimo *funkcije* — v prvem primeru realne, v drugem pa kompleksne. V tem poglavju bomo obravnavali realne funkcije ene realne spremenljivke, to so preslikave

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}.$$

Definicijsko območje D in zaloga vrednosti

$$Z_f = \{y \in \mathbb{R};\ y = f(x) \text{ za nek } x \in D\} = f(D)$$

sta podmnožici množice $\mathbb{R}$. Funkcija f priredi številu $x \in D$ (*neodvisni spremenljivki*) realno število $y = f(x) \in Z_f$, (*odvisno spremenljivko*).

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je določena z definicijskim območjem D, s predpisom f in z zalogo vrednosti Z_f. Kadar definicijskega območja funkcije ne navajamo posebej, je to največja množica $D \subset \mathbb{R}$, na kateri je predpis f še definiran.

Primer 3.1.1. Oglejmo si nekaj preprostih funkcij.

1. Naj bo $c \in \mathbb{R}$ in $f(x) = c$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Taki funkciji pravimo (iz očitnih razlogov) *konstantna funkcija*, njeno definicijsko območje je cela množica realnih števil, njena zaloga vrednosti pa ena sama točka $Z_f = \{c\} \subset \mathbb{R}$.

2. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *identična funkcija*:
$$f(x) = x.$$
Definicijsko območje in zaloga vrednosti identične funkcije je cela množica $\mathbb{R}$.

3. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Funkciji
$$f(x) = x^n$$
pravimo *potenčna funkcija*, njeno definicijsko območje je $\mathbb{R}$, zaloga vrednosti je odvisna od n: če je n sodo število, je $Z_f = [0, \infty)$, če je n liho število, je $Z_f = \mathbb{R}$.

4. V razdelku 1.2.4 smo pokazali, da ima vsako pozitivno število $x \geq 0$ natanko določen pozitiven koren $y = \sqrt[n]{x}$, ki zadošča enačbi $y^n = x$. Za liha števila $n = 2k + 1$ smo definicijo korena razširili še na negativna števila. Funkcija
$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$
ima za $n = 2k$ definicijsko območje $[0, \infty)$ in zalogo vrednosti $[0, \infty)$, za $n = 2k + 1$ pa definicijsko območje in zalogo vrednosti $\mathbb{R}$. ∎

Dve funkciji f in g sta enaki, kadar imata enaki definicijski območji: $D_f = D_g = D$ in če za vsak $x \in D$ velja $f(x) = g(x)$.

Primer 3.1.2. Dve funkciji nista enaki, če nimata enakih definicijskih območij, čeprav sta funkcijska predpisa navidez enaka:

1. Naj bo $f(x) = x$ in $g(x) = (\sqrt{x})^2$. Za vsak $x \in D_g$ je $f(x) = g(x)$, definicijski območji $D_f = \mathbb{R}$ in $D_g = [0, \infty)$ pa sta različni, torej sta f in g različni funkciji $f \neq g$.

2. Naj bo $f(x) = |x|$ in $g(x) = \sqrt{(x^2)}$. Funkciji f in g imata enaki definicijski območji $D_f = D_g = \mathbb{R}$ in $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, torej je $f = g$. ∎

Graf funkcije

Graf realne funkcije ene realne spremenljivke

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

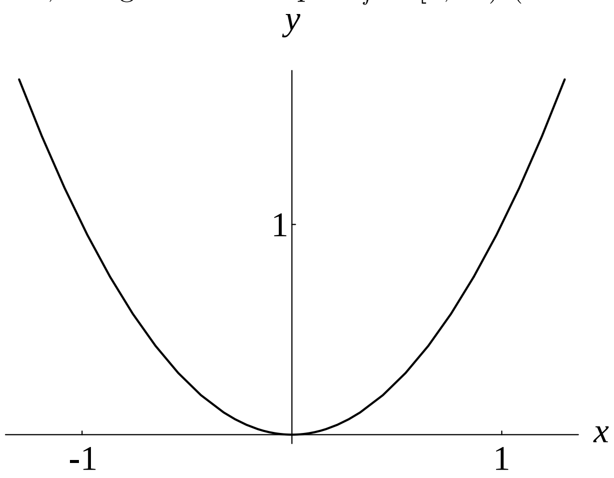
je podmnožica koordinantne ravnine. Vsaka navpična premica $x = a$, kjer je $a \in D$ seka graf $\Gamma(f)$ v natanko eni točki (navpična premica $x = a$, $a \notin D$ grafa sploh ne seka). Pravokotna projekcija grafa $\Gamma(f)$ na os x je definicijsko območje D, projekcija na os y pa je zaloga vrednosti Z_f.

Primer 3.1.3. Nekaj grafov funkcij:

1. Graf konstantne funkcije $f(x) = c$ je vodoravna premica na višini c.

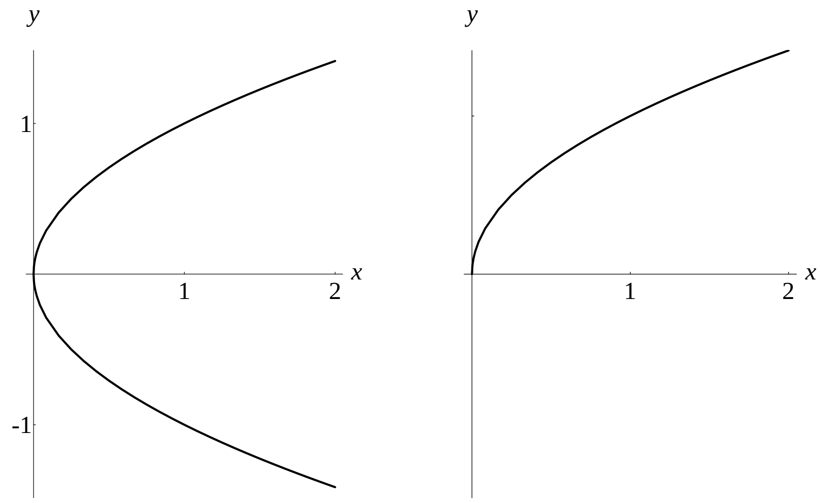
2. Graf identične funkcije $f(x) = x$ je premica $y = x$, ki razpolavlja prvi in tretji kvadrant.

3. Graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ je parabola $y = x^2$. Definicijsko območje je $\mathbb{R}$, zaloga vrednosti pa $Z_f = [0, \infty)$ (slika 3.1).



Slika 3.1: Graf funkcije $f(x) = x^2$

4. Enačba $y^2 = x$ določa množico točk $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ki ležijo na paraboli (slika 3.2). Ta parabola ni graf funkcije, kajti vse navpične premice $x = a > 0$ jo sekajo v dveh točkah (vsakemu $a > 0$ pripadata dve vrednosti $y = \pm\sqrt{a}$, ki zadoščata dani enačbi). Enačba $y^2 = x$ zato ne določa funkcije $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.



Slika 3.2: Točke, ki zadoščajo enačbi $y^2 = x$ (levo) in graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ (desno)

> Enačba $y^2 = x$; $y \geq 0$ določa funkcijo $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, to je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$. Njen graf je na sliki 3.2. ∎

Funkcijski predpis $f(x)$ je lahko dan eksplicitno (tako kot v prvih treh primerih), *implicitno* z enačbo, ki povezuje neodvisno spremenljivko x in funkcijsko vrednost $y = f(x)$ (kot v četrtem primeru), ali pa kako drugače — na primer parametrično, opisno, grafično ....

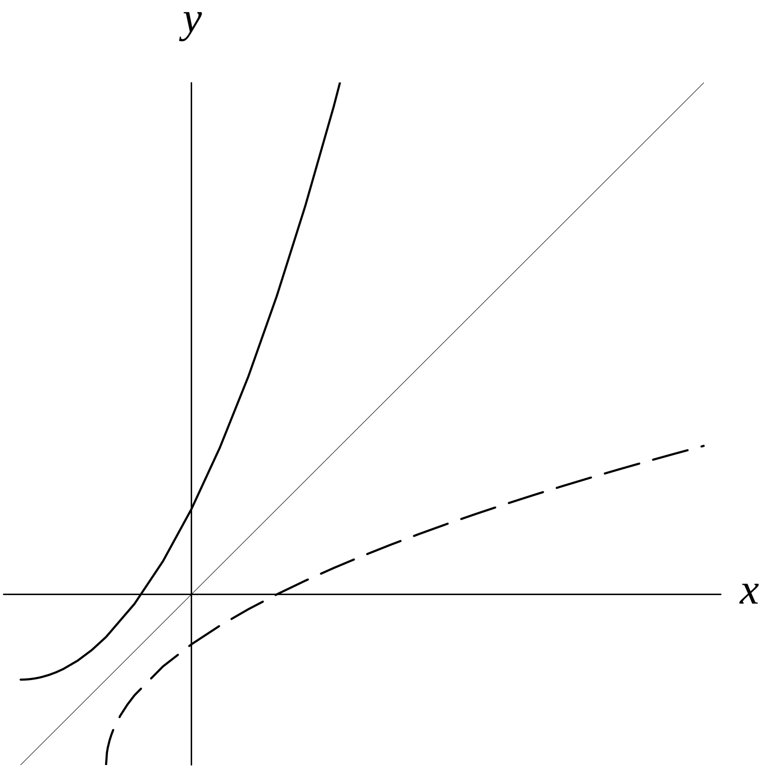
Če je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ injektivna (razdelek 1.1.2), pripada vsaki vrednosti $c \in Z_f$ natanko en $x \in D$, za katerega je $f(x) = c$, torej seka vodoravna premica $y = c$, $c \in Z_f$, graf $\Gamma(f)$, v natanko eni točki. Vodoravna premica $y = c$, $c \notin Z_f$ pa grafa sploh ne seka.

Če je $f : D \to \mathbb{R}$ surjektivna (razdelek 1.1.2), je vsak $c \in \mathbb{R}$ v zalogi vrednosti Z_f, torej vsaka vodoravna premica $y = c$ seka graf $\Gamma(f)$ vsaj v eni točki.

Inverzna funkcija Injektivna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *obrnljiva* (glej razdelek 1.1.2), torej ji pripada *inverzna funkcija*

$$f^{-1} : Z_f \to \mathbb{R},$$

katere zaloga vrednosti je definicijsko območje D funkcije f. Inverzno funkcijo f^{-1} dobimo tako, da zamenjamo vlogo spremenljivk x in y. Graf $\Gamma(f^{-1})$ je graf $\Gamma(f)$ prezrcaljen preko premice $y = x$ (slika 3.3).



Slika 3.3: Graf funkcije in njene inverzne funkcije

Primer 3.1.4.

1. Funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, je injektivna. Njena inverzna funkcija je $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = x^2$. Splošneje: za vsako sodo število $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ obrnljiva, inverzna funkcija je $f^{-1}(x) = x^n$; $x \geq 0$. Za vsako liho število $n \in \mathbb{N}$ je inverzna funkcija $f^{-1}(x) = x^n$; $x \in \mathbb{R}$.

2. Tudi funkcija

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}, \quad f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$$

je injektivna. Njeno inverzno funkcijo dobimo tako, da v enačbi

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

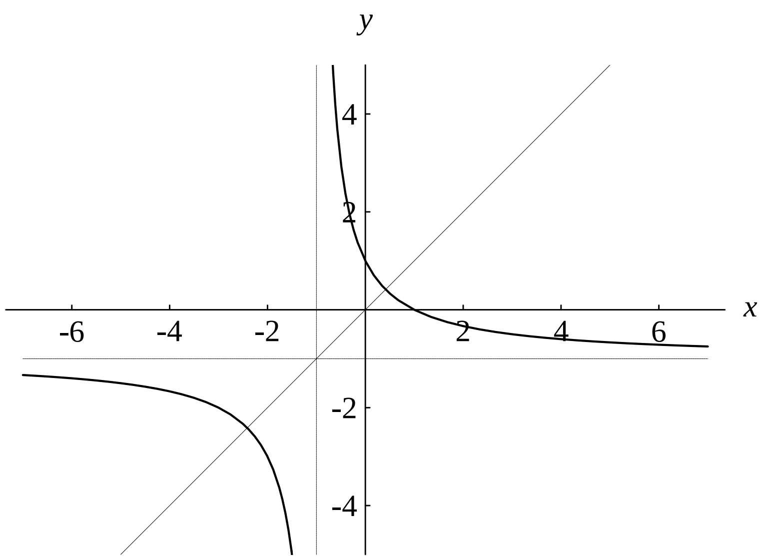
zamenjamo vlogi spremenljivk:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-y}{1+y} \\ x + xy &= 1 - y \\ y &= \frac{1-x}{1+x}. \end{aligned}$$

Tako je

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Funkcija je sama sebi inverzna, njen graf je simetričen glede na premico $y = x$ (slika 3.4). ■



Slika 3.4: Graf racionalne funkcije $f(x) = (x-1)/(x+1)$

Monotone funkcije so funkcije, pri katerih z naraščanjem vrednosti neodvisne spremenljivke stalno narašča (ali stalno pada) tudi vrednost odvisne spremenljivke. Povejmo natančneje:

Definicija 3.1.1. Funkcija $y = f(x)$ je *naraščajoča*, če za poljubni števili $x_1 < x_2$ iz definicijskega območja funkcije f velja, da je tudi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Če q je $f(x_1) < f(x_2)$, potem je f *strogo naraščajoča.*

Funkcija $y = f(x)$ je *padajoča*, če za poljubni števili $x_1 < x_2$ iz definicijskega območja funkcije f velja, da je tudi $f(x_1) \geq f(x_2)$. Če je $f(x_1) > f(x_2)$, potem je f *strogo padajoča.*

Funkcija je *monotona*, če je padajoča ali naraščajoča in *strogo monotona*, če je strogo padajoča ali strogo naraščajoča.

Strogo monotone funkcije so injektivne, zato ima vsaka strogo monotona funkcija svojo inverzno funkcijo. Inverzna funkcija naraščajoče funkcije je spet naraščajoča, inverzna funkcije padajoče funkcije je padajoča.

Računanje s funkcijami

Iz funkcij lahko na različne načine sestavljamo nove funkcije. Če imamo funkciji $f : D \to \mathbb{R}$ in $g : D \to \mathbb{R}$ z enakima definicijskima območjema, lahko tvorimo njuno vsoto in razliko:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

njun produkt

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

ki imajo vse definicijsko območje D, in njun kvocient

$$f/g : D' \to \mathbb{R} \quad (f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

ki ima za definicijsko območje množico

$$D' = \{x \in D,\ g(x) \neq 0\} \subseteq D.$$

Primer 3.1.5.

1. Funkcija oblike
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
je *polinom*. Vsak člen polinoma je produkt konstante a_i, ki ji pravimo *koeficient*, in potenčne funkcije x^i. Koeficientu $a_n \neq 0$ pri najvišji potenci x^n pravimo *vodilni koeficient*, eksponentu n pa *stopnja polinoma*. Definicijsko območje polinoma so vsa realna števila $\mathbb{R}$.

2. Kvocientu dveh polinomov
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$
pravimo *racionalna funkcija*, njeno definicijsko območje je
$$\{x \in \mathbb{R},\ q(x) \neq 0\}.$$

■

Če sta dani funkciji $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $g : D_g \to \mathbb{R}$ in je zaloga vrednosti Z_f vsebovana v definicijskem območju D_g, obstaja *sestavljena funkcija* ali *kompozitum* (glej razdelek 1.1.2)

$$g \circ f : D_f \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Primer 3.1.6. Če sta

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad \text{in} \quad g(x) = \sqrt{x},$$

je funkcija

$$(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

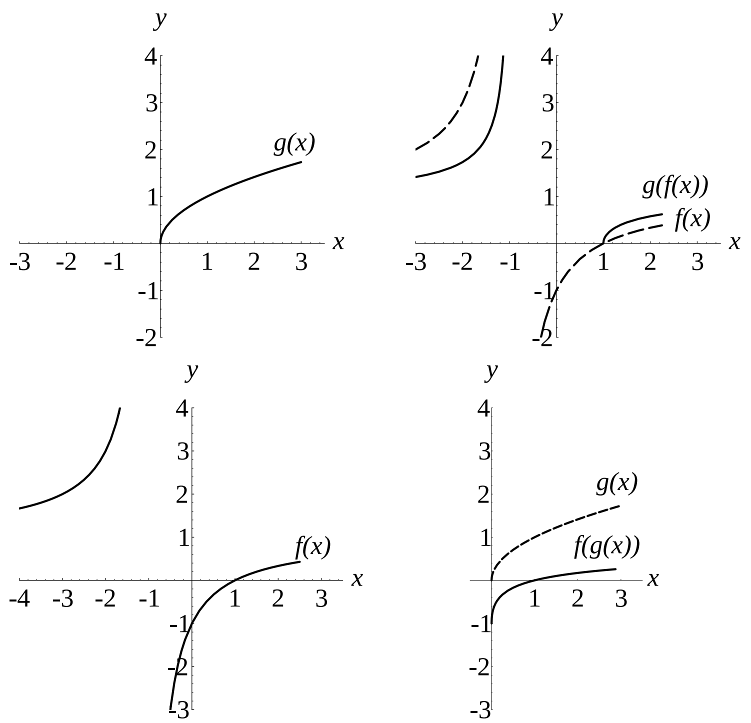
definirana za vsak $x \geq 0$, funkcija

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

pa je definirana, če je

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 0, \quad \text{torej} \quad x < -1 \quad \text{ali} \quad x \geq 1.$$

Grafe sestavljenih funkcij pogosto rišemo v dveh (ali več) korakih, tako kot so funkcije sestavljene (slika 3.5). ■



Slika 3.5: Konstrukcija grafov sestavljenih funkcij iz primera 3.1.6

Če je f obrnljiva in f^{-1} njena inverzna funkcija, velja zveza

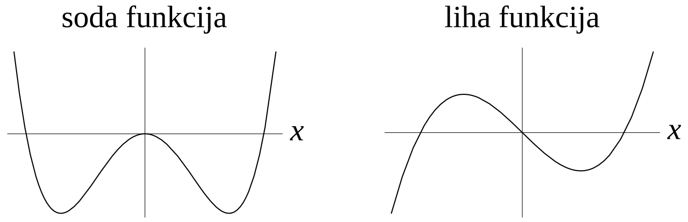
$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Sode in lihe funkcije

Naj bo definicijsko območje D funkcije f simetrično glede na točko $0 \in \mathbb{R}$, na primer $D = (-a, a)$.

Definicija 3.1.2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *soda*, če je $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in D$. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *liha*, če je $f(x) = -f(-x)$ za vsak $x \in D$.

Graf sode funkcije je krivulja, ki je simetrična glede na os y. Graf lihe funkcije pa je simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema.



Slika 3.6: Soda in liha funkcija

Primer 3.1.7. Poglejmo si nekaj primerov sodih in lihih funkcij:

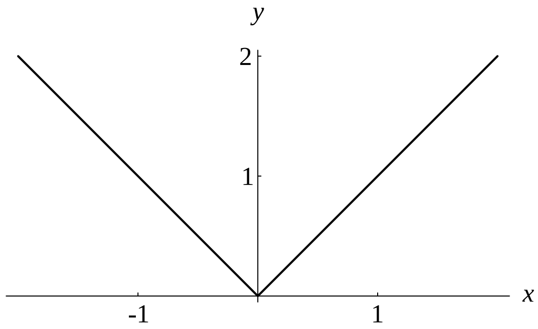
1. Funkcija, ki vsakemu številu priredi njegovo absolutno vrednost,
$$f(x) = |x|$$
je soda, kajti $|-x| = |x|$. Njen graf je simetričen glede na os y (slika 3.7).

2. Funkcija
$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$$
je liha, ker je
$$f(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -f(x).$$

3. Potenčna funkcija $f(x) = x^n$ je soda, če je $n = 2k$ sodo število, in liha, če je $n = 2k + 1$ liho število (slika 3.8).

4. Korenska funkcija $f(x) = \sqrt[n]{x}$ je liha, če je $n = 2k+1$ liho število, če je n sodo, pa ni ne liha ne soda, ker njeno definicijsko območje $D = [0, \infty)$ v tem primeru ni simetrično glede na izhodišče. ■

Trditev 3.1.1. *Vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih funkcij je liha funkcija. Produkt (ali kvocient) dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt sode in lihe funkcije pa je liha funkcija.*



Slika 3.7: Graf funkcije $f(x) = |x|$.

Dokažimo, da je produkt dveh lihih funkcij soda funkcija. Če je $f(-x) = -f(x)$ in $g(-x) = -g(x)$, je

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) \\ &= (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)\end{aligned}$$

in trditev za ta primer je dokazana. Dokazi vseh ostalih primerov so prav tako preprosti, zato jih prepustimo bralcu.

Primer 3.1.8. Polinom s samimi sodimi potencami je soda funkcija, polinom s samimi lihimi potencami pa je liha funkcija. Na primer:

$$f(x) = x^6 + 4x^2 - 1$$

je soda (konstanta je soda potenca $1 = x^0$),

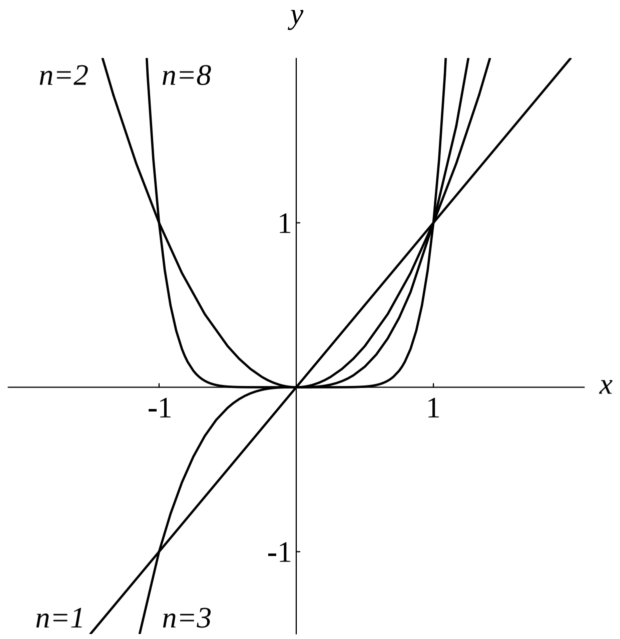
$$g(x) = x^7 - 5x^5 + 3x^3 - x \quad \text{in} \quad h(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$

sta lihi funkciji. ■

3.2 Zvezne funkcije

Oglejmo si funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x \ ; & \text{za} \quad x \leq 0 \\ 0 \ ; & \text{za} \quad 0 < x < 1 \\ x - 2; & \text{za} \quad x \geq 1 \end{cases} . \tag{3.1}$$



Slika 3.8: Grafi funkcij $f(x) = x^n$ za $n = 1, 2, 3, 8$.

Funkcija $f(x)$ je *zlepek* treh linearnih funkcij. Njen graf (slika 3.9) je v točki $x = 0$ nepretrgana krivulja, v točki $x = 1$ pa je pretrgan. Vedenje funkcije f v okolici točke 0 je torej bistveno različno kot njeno vedenje v okolici točke 1 — funkcijska vrednost $f(x)$ v točkah x, ki so blizu točke 0, se ne razlikuje dosti od vrednosti $f(0) = 0$, vrednost $f(x)$ v točkah $x < 1$, ki so zelo blizu 1, pa se od $f(1)$ razlikuje skoraj za 1.

Pravimo, da je f v točki 0 zvezna, v točki 1 pa nezvezna. Razliko med vedenjem funkcije f v točki 0 in v točki 1 opišimo natančneje.

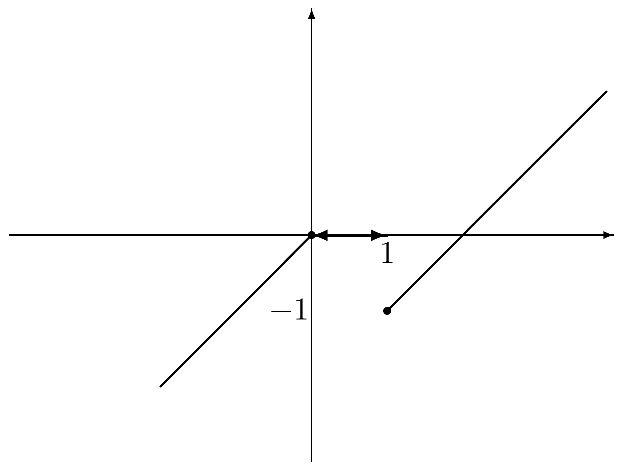
Definicija 3.2.1. Funkcija f je v točki x_0 *zvezna*, če lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da je

$$|\Delta y| = |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

če je $|h| < \delta$.

Drugače povedano: za vsako ε-okolico $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ točke $f(x_0)$ na osi y obstaja taka δ-okolica $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ točke x_0 na osi x, da je $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (slika 3.10).

Ohlapno rečeno: funkcija je zvezna takrat, kadar majhna sprememba neodvisne spremenljivke povzroči majhno spremembo funkcijske vrednosti.



Slika 3.9: Nezvezna funkcija, definirana z enačbo (3.1)

Zavedati se moramo pomena zveznosti (oziroma pasti, ki jih skriva nezveznost) v praksi. Kadar računamo, uporabljamo le nekatera racionalna števila, vsa ostala števila pa zaokrožujemo, torej zanje uporabljamo neke približke. Če je funkcija v točki x_0 zvezna in x_1 približek za x_0, bo vrednost $f(x_1)$ približek za vrednost $f(x_0)$ — v okviru predpisane (ali željene) natančnosti, če je le napaka $|x_0 - x_1|$ dovolj majhna. Če funkcija v točki x_0 ni zvezna, se lahko vrednost $f(x_1)$ močno razlikuje od vrednosti $f(x_0)$, ne glede na to, kako dober približek za vrednost x_0 je x_1.

Primer 3.2.1. Pokažimo, da funkcija (3.1) v točki 0 zadošča definiciji zveznosti.

Vzemimo poljubno majhen $\varepsilon > 0$. Če je $|h| < 1$, je

$$f(h) - f(0) = \begin{cases} 0; & h > 0 \\ h; & h \leq 0 \end{cases} .$$

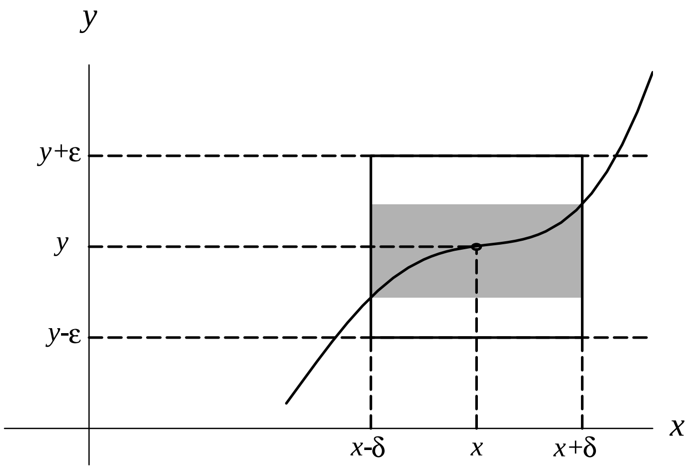
Neenačba

$$|f(h) - f(0)| < \varepsilon$$

je izpolnjena za vsak $|h| < \varepsilon$, torej je iskani $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$.

Pokažimo še, da funkcija f v točki 1 ni zvezna. Tu je

$$f(1+h) - f(1) = \begin{cases} -1; & h < 0 \\ h; & h \geq 0 \end{cases} .$$



Slika 3.10: Definicija zvezne funkcije

Za vsak $\delta < 1$, je $|f(1+h) - f(1)| = 1$, če je $|h| < \delta$ in $h < 0$, torej ta razlika ne more biti manjša od nobenega $\varepsilon < 1$. ■

Limita

Ugotavljanje zveznosti funkcije le na podlagi definicije je precej naporno celo pri tako preprostih funkcijah kot je (3.1). Potrebujemo kakšen bolj praktičen kriterij za zveznost, s katerim si lahko pomagamo. Do takega kriterija pridemo s pomočjo pojma limite funkcije.

Definicija 3.2.2. Naj bo funkcija f definirana na intervalu (a, b), razen morda v eni točki $\xi \in (a, b)$. Pravimo, da funkcija f *konvergira* k vrednosti l, ko gre x proti ξ, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

če je le $|\xi - x| < \delta$.

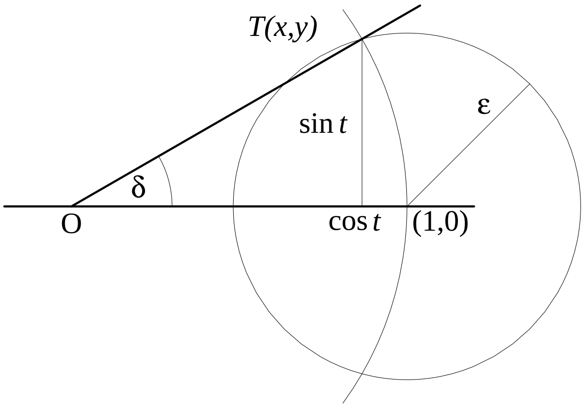
Število l je *limita* funkcije f v točki ξ, kar zapišemo:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = l \quad \text{ali pa} \quad f(x) \to l,\ x \to \xi.$$

Primer 3.2.2. Limite funkcij:

1. Limita funkcije (3.1) v točki 0 je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$



Slika 3.11: Limiti funkcij $\sin t$ in $\cos t$, $t \to 0$

2. Spomnimo se definicije kotnih funkcij sin in cos: naj bo t kot z vrhom v koordinatnem izhodišču v ravnini in prvim krakom na osi x, točka $T(x, y)$ pa presečišče drugega kraka s krožnico

$$K = \{(x, y);\ x^2 + y^2 = 1\}$$

(pri tem merimo kote v pozitivni smeri, tj. v nasprotni smeri vrtenja urinega kazalca). Potem je $x = \sin t$ in $y = \cos t$. Na sliki 3.11 vidimo, da za vsak, še tako majhen $\varepsilon > 0$ najdemo tak kot δ, da je

$$|\sin h| < \varepsilon \quad \text{in} \quad |\cos h - 1| < \varepsilon$$

za vsak $|h| < \delta$: okrog točke $(1, 0)$ narišemo krožnico s polmerom ε in drugi krak kota δ potegnemo skozi tisto presečišče te krožnice s krožnico K, ki je v zgornji polravnini. Iz te konstrukcije sledi

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

■

Funkcija (3.1) v točki 1 nima limite: če se x številu 1 približuje z leve strani, je funkcijska vrednost ves čas enaka 0, če se približuje z desne, pa se $f(x)$ približuje vrednosti -1. V takšnem primeru pravimo, da ima funkcija *levo limito* enako 0, *desno limito* pa -1. Splošneje:

Definicija 3.2.3. Funkcija f, definirana na intervalu (a, b), *konvergira z leve* k vrednosti l, ko x narašča proti b, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

če je $b - \delta < x < b$.

Število l je *leva limita* funkcije f v točki b, kar zapišemo

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = l \quad \text{ali} \quad f(x) \to l,\ x \nearrow b.$$

Podobno definiramo pojem desne limite:

Definicija 3.2.4. Funkcija f, definirana na (a, b), *konvergira z desne* k vrednosti l, ko x pada proti a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

če je $a < x < a + \delta$.

Število l je *desna limita* funkcije f v točki a, kar zapišemo:

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = l \quad \text{ali} \quad f(x) \to l,\ x \searrow a.$$

Neposredno iz definicij sledi:

Trditev 3.2.1.

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = l$$

natanko takrat, kadar je

$$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) = \lim_{x \searrow \xi} f(x) = l.$$

Limite smo srečali že pri zaporedjih, zato poglejmo kakšna je zveza med limito funkcije in limito zaporedja:

Izrek 3.2.2. *Naj bo f definirana na intervalu (a, b), razen morda v točki $\xi \in (a, b)$. Potem je*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = l$$

natanko takrat, kadar za vsako zaporedje (x_n) z intervala (a, b), ki konvergira proti ξ, zaporedje slik $(f(x_n))$ konvergira proti l.

Dokaz: Naj bo (x_n) konvergentno zaporedje, $\{x_n\} \subset (a,b)$ z limito $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ in $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$. Pokažimo, da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Ko izberemo $\varepsilon > 0$, lahko najdemo tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - l| < \varepsilon$, če je le $|x - \xi| < \delta$. Ker zaporedje (x_n) konvergira proti ξ, obstaja naravno število n_0, da za vsak $n > n_0$ velja ocena $|x_n - \xi| < \delta$, od tod pa sledi, da je $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Dokazali smo, da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Recimo, da limita funkcije $f(x)$, ko $x \to \xi$ ne obstaja, ali je različna od l. Pokazati moramo še, da v tem primeru obstaja tako zaporedje (x_n), ki konvergira proti ξ, za katero zaporedje slik $(f(x_n))$ ne konvergira proti vrednosti l.

Če število l ni limita funkcije $f(x)$, ko $x \to \xi$, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je v vsaki δ-okolici točke ξ vsaj ena točka x, za katero je $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. Tudi za vsak $\delta = 1/n$ obstaja taka točka x_n, da je $|\xi - x_n| < 1/n$ in $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Zaporedje (x_n), ki ga tako dobimo, očitno konvergira proti ξ, vse vrednosti $f(x_n)$ pa so od l oddaljene za več kot ε, torej zaporedje $(f(x_n))$ gotovo ne konvergira k l. $\square$

Podobne trditve veljajo tudi za levo in desno limito funkcije. Na primer: $\lim_{x\nearrow b} f(x) = l$ natanko takrat, ko za vsako naraščajoče zaporedje $x_n \to b$ velja $f(x_n) \to l$.

Vpeljimo še nekaj oznak, ki jih bomo pogosto uporabljali.

Naj bo $f(x) = g(x)/h(x)$, kjer sta funkciji $g(x)$ in $h(x)$ zvezni v točki a in je $h(x) \neq 0$ za $x \neq a$, $h(a) = 0$ in $g(a) \neq 0$. V tem primeru pravimo, da ima funkcija v točki a *pol*. Ko se x približuje polu, raste (ali pada) vrednost $f(x)$ preko vseh meja. Graf funkcije $f(x)$ se približuje navpični premici $x = a$, ki ji pravimo *navpična asimptota*. Takšno vedenje funkcije opišemo simbolično

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \text{ali} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

Prva oznaka pomeni, da za vsak M obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) > M$ za vsak $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Podobno velja za $-\infty$.

Podobno definiramo oznake:

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = \infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\nearrow a} f(x) = \infty$$

ter

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = -\infty \quad \text{in} \quad \lim_{x\nearrow a} f(x) = -\infty.$$

Če je funkcija $f(x)$ definirana na neomejenem intervalu $[a, \infty)$, se lahko funkcijska vrednost približuje neki končni vrednosti A, ko raste $x \to \infty$. V tem primeru se graf funkcije $f(x)$ približuje vodoravni premici $y = A$, ki ji pravimo *vodoravna asimptota*. Takšno vedenje funkcije zapišemo simbolično

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$$

kar pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M > a$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, če je $x > M$.

Če skupaj z x tudi funkcijska vrednost raste preko vseh meja, torej če za vsak A obstaja tak M, da je $f(x) > A$, če je $x > M$, zapišemo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Podobno lahko opišemo tudi vedenje funkcije, ki je definirana na neomejenem intervalu $(-\infty, b]$, ko gre $x \to -\infty$.

Kriteriji za zveznost funkcije

Limita funkcije v točki $x = \xi$ lahko obstaja ali ne — ne glede na to, ali je funkcija v tej točki definirana. Če je vrednost $f(\xi)$ definirana, velja:

Trditev 3.2.3. *Funkcija $f(x)$ je v točki ξ zvezna natanko takrat, kadar njena limita v točki ξ obstaja in velja*

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi).$$

Zadnja trditev je preprosta posledica definicij zveznosti in limite in določa zelo uporaben kriterij za ugotavljanje zveznosti. Pogosto raje uporabimo enakovredno trditev:

Trditev 3.2.4. *Funkcija $f(x)$ je v točki ξ zvezna natanko takrat, kadar je*

$$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) = \lim_{x \searrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Primer 3.2.3. Če se še zadnjič vrnemo k primeru (3.1), zlahka ugotovimo, da je

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = f(0) = 0,$$

in f je v točki $x = 0$ zvezna. V točki $x = 1$ je

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = -1,$$

zato f v točki $x = 1$ ni zvezna. ■

Ker je $\lim_{x \searrow 1} f(x) = f(1)$ pravimo, da je funkcija (3.1) v točki $x = -1$ *zvezna z desne.*

Definicija 3.2.5. Funkcija f je v točki $x = \xi$ *zvezna z leve*, če je

$$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) = f(\xi)$$

in *zvezna z desne*, če je

$$\lim_{x \searrow \xi} f(x) = f(\xi).$$

Pogosto se zgodi, da funkcija f v točki $x = \xi$ ni definirana, vendar obstaja $\lim_{x \to \xi} f(x)$. V takih primerih lahko dodatno definiramo

$$f(\xi) = \lim_{x \to \xi} f(x).$$

Strogo gledano smo tako dobili novo funkcijo, ki ima večje definicijsko območje kot f (za točko ξ), vendar so njene vrednosti enake vrednostim funkcije f povsod, kjer je ta definirana, v točki ξ pa je ta nova funkcija zvezna. Pravimo, da smo funkcijo f *zvezno razširili* na točko ξ.

Primer 3.2.4. Naj bo

$$f(x) = \frac{(1+x)^2 - 1}{x}.$$

Funkcija f v točki 0 seveda ni definirana, obstaja pa

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2}{x} = \lim_{x \to 0} (2 + x) = 2.$$

Če torej dodatno definiramo

$$f(0) = 2,$$

smo f zvezno razširili na 0 (in povsod velja $f(x) = x + 2$). ■

Zapišimo še en koristen kriterij za ugotavljanje zveznosti, ki prav tako sledi neposredno iz definicije limite in zveznosti:

Trditev 3.2.5. *Funkcija $f(x)$, definirana na intervalu (a,b), je v točki $\xi \in (a,b)$ zvezna natanko takrat, kadar je*

$$\lim_{h\to 0} \Delta y = \lim_{h\to 0}(f(\xi + h) - f(\xi)) = 0,$$

torej, kadar gre prirastek Δy odvisne spremenljivke proti 0, ko gre prirastek h neodvisne spremenljivke proti 0.

Primer 3.2.5.

1. Pokažimo, da je konstantna funkcija $f(x) = c$ zvezna v vsaki točki x:

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

   in očitno je tudi

$$\lim_{h\to 0} \Delta y = 0.$$

2. Pokažimo še za identično funkcijo $f(x) = x$, da je zvezna v vsaki točki

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}((x+h) - x) = 0.$$

■

Naslednji kriterij za zveznost je neposredna posledica izreka 3.2.2:

Izrek 3.2.6. *Funkcija $f(x)$, definirana na intervalu (a,b), je v točki $\xi \in (a,b)$ zvezna natanko takrat, kadar za vsako konvergentno zaporedje $x_n \to \xi$ velja $f(x_n) \to f(\xi)$.*

Računanje z zveznimi funkcijami

Iz izreka 3.2.2 sledi, da ima limita funkcije podobne lastnosti kot limita zaporedja:

Izrek 3.2.7. *Če sta funkciji f in g definirani na intervalu (a,b), razen morda v točki $\xi \in (a,b)$ in je $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$ in $\lim_{x\to\xi} g(x) = m$, velja:*

$$\lim_{x\to\xi}(f(x) \pm g(x)) = l \pm m$$

$$\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = lm,$$

in, če je $g(x) \neq 0$ v neki okolici točke xi in $m \neq 0$,

$$\lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l}{m}.$$

Posledica 3.2.8. *Če sta funkciji $f(x)$ in $g(x)$ zvezni v točki $\xi \in (a, b)$, so v ξ zvezne tudi funkcije $f(x) \pm g(x)$ in $f(x)g(x)$. Če je $g(\xi) \neq 0$, je v ξ zvezna tudi funkcija $f(x)/g(x)$.*

Primer 3.2.6. Oglejmo si nekaj zveznih funkcij. V primeru 3.2.5 smo pokazali, da je identična funkcija zvezna v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$. Potenčna funkcija $f(x) = x^n$ je produkt n zveznih funkcij $f(x) = x \cdot x \cdots x$, zato je zvezna v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$.

Ker je konstanta tudi zvezna funkcija (glej primer 3.2.5), je produkt ax^n zvezna funkcija.

Polinom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je zato vsota zveznih funkcij in je zvezen v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$.

Racionalna funkcija je kvocient dveh zveznih funkcij

$$q(x) = \frac{a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots b_1 x + b_0}$$

in je zvezna v vsaki točki $x \in \mathbb{R}$, kjer je definirana, tj. tam, kjer je imenovalec različen od 0. ∎

Tudi naslednji izrek je neposredna posledica podobnega izreka 2.1.6, ki govori o limitah zaporedij:

Izrek 3.2.9. *Če za funkcije $f(x)$, $g(x)$ in $h(x)$, ki so definirane na intervalu (a, b), razen morda v točki $\xi \in (a, b)$, povsod velja*

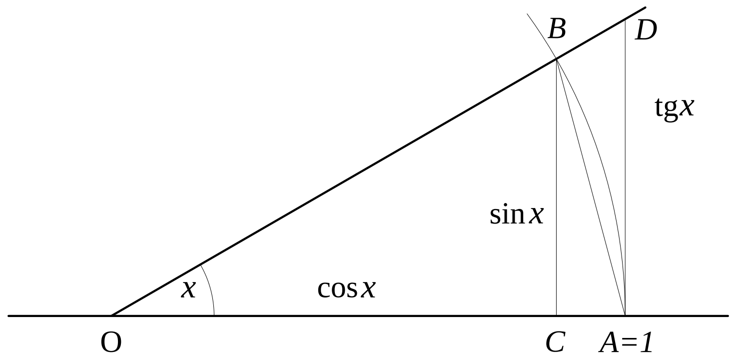
$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

in

$$\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} h(x) = l,$$

je tudi

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = l.$$



Slika 3.12: Konvergenca funkcije $(\sin x)/x$

Primer 3.2.7. Uporaba izreka 3.2.9:

1. Izračunajmo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Na sliki 3.12 je ploščina trikotnika $\triangle OAB$ enaka $(\sin x)/2$, ploščina krožnega izseka $\sphericalangle OAB$ je $x/2$, ploščina trikotnika $\triangle OAD$ pa $(\operatorname{tg} x)/2$. Očitno je, da so te ploščine urejene po velikosti, torej za vsak $x > 0$ velja
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Za $0 < x < \pi$ je $\sin x > 0$ in zgornjo neenakost lahko delimo s $\sin x$, da dobimo
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{oziroma} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

V primeru 3.2.2 smo se prepričali, da je $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, zato iz izreka 3.2.9 sledi:
$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Na podoben način bi se prepričali, da je tudi leva limita enaka 1:
$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. V razdelku 2.1.4 smo pokazali, da

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Pokažimo, da je tudi

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.2}$$

Ker velja neenakost

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1},$$

lahko v izreku 3.2.9 izberemo

$$g(x) = \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor} \quad \text{in} \quad h(x) = \left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor+1}.$$

Ker sta limiti

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

in

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

obe enaki e, mora veljati tudi (3.2). ∎

Izrek 3.2.10. *Če obstaja*

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = l$$

in je funkcija $g(u)$ zvezna v točki $u = l$, obstaja tudi limita kompozituma $g\circ f$ in je

$$\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = g(\lim_{x\to\xi} f(x)) = g(l).$$

Dokaz. Naj bo (x_n) poljubno zaporedje, ki konvergira proti ξ. Ker $f(x) \to l$, ko $x \to \xi$, sledi iz izreka 3.2.2, da $(f(x_n)) \to l$. Ker je $g(u)$ zvezna pri $u = f(\xi)$, je

$$(g(f(x_n))) = (g \circ f)(x_n) \to g(l).$$

Po izreku 3.2.2 je torej

$$\lim_{x \to \xi} (g \circ f)(x) = g(l).$$

□

S pomočjo trditve 3.2.3 od tod dobimo

Posledica 3.2.11. *Če je funkcija $f(x)$ zvezna v točki $x = \xi$ in funkcija $g(u)$ zvezna v točki $u = f(\xi)$, je kompozitum $(g \circ f)(x)$ zvezen v točki $x = \xi$.*

Ta rezultat lahko uporabimo tudi za dokaz zveznosti inverzne funkcije:

Izrek 3.2.12. *Če je funkcija $f(x)$ injektivna (tj. če obstaja inverzna funkcija f^{-1}) in zvezna v točki $x = \xi$, je inverzna funkcija $f^{-1}(y)$ zvezna v točki $y = f(\xi)$.*

Dokaz. Ker je f zvezna v točki $x = \xi$, je

$$\lim_{y \to f(\xi)} f(f^{-1}(y)) = f(\lim_{y \to f(\xi)} f^{-1}(y)).$$

Po drugi strani je

$$\lim_{y \to f(\xi)} f(f^{-1}(y)) = \lim_{y \to f(\xi)} y = f(\xi),$$

zato tudi

$$f(\lim_{y \to f(\xi)} f^{-1}(y)) = f(\xi).$$

Ker je f injektivna funkcija, mora biti

$$\lim_{y \to f(\xi)} f^{-1}(y) = \xi = f^{-1}(f(\xi))$$

in je, po trditvi 3.2.3, funkcija f^{-1} zvezna v točki $f(\xi)$. □

Primer 3.2.8. Funkcija $f(x) = x^n$ je zvezna, zato je tudi njej inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ zvezna: za liho število n je definirana na celi množici $\mathbb{R}$, za sodo število n pa le za $x \geq 0$. ■

Zveznost funkcij na intervalu

Definicija 3.2.6. Funkcija $f(x)$ je *zvezna na odprtem intervalu* (a, b), če je zvezna v vsaki točki $x \in (a, b)$. Funkcija $f(x)$ je *zvezna na zaprtem intervalu* $[a, b]$, če je zvezna na odprtem intervalu (a, b), zvezna z desne v točki a in zvezna z leve v točki b.

Za funkcijo, ki je zvezna na intervalu, lahko v vsaki točki tega intervala k vsakemu ε najdemo tak δ, da se bo funkcijska vrednost spremenila za manj kot ε, če se neodvisna spremenljivka spremeni za manj kot δ. Seveda pa je v vsaki točki pri istem ε lahko potreben drugačen δ. Pri nekaterih zveznih funkcijah pa pri vsakem ε na celem intervalu zadošča isti δ:

Definicija 3.2.7. Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ *enakomerno zvezna*, če vsakemu $\varepsilon > 0$ pripada tak $\delta > 0$, da je neenačba

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

izpolnjena za vse take x_1, x_2 z intervala $[a, b]$, za katere je $|x_2 - x_1| < \delta$.

Primer 3.2.9. Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ je enakomerno zvezna na vsakem intervalu $[0, a]$, kjer je $a > 0$. Razliko $f(x_2) - f(x_1)$ zapišemo kot

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x}_2 - \sqrt{x}_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x}_1 + \sqrt{x}_2}, \quad x_1 < x_2.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\delta = \varepsilon^2$. Ker je $x_2 \geq x_2 - x_1$, je $\sqrt{x}_2 \geq \sqrt{x_2 - x_1}$, še bolj pa $\sqrt{x}_2 + \sqrt{x}_1 \geq \sqrt{x_2 - x_1}$. Če imenovalec v izrazu na desni v zgornji enakosti zamenjamo z $\sqrt{x_2 - x_1}$, se bo vrednost ulomka kvečjemu povečala in

$$|f(x_2) - f(x_1)| \geq \sqrt{x_2 - x_1} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Ta ocena velja za poljubni števili x_1 in x_2 z intervala $[0, a]$, ki zadoščata pogoju $|x_2 - x_1| < \delta$. Tako smo pokazali, da je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, a]$ enakomerno zvezna. ∎

Funkcija, ki je enakomerno zvezna na intervalu I, je zvezna v vsaki točki tega intervala. Na končnem zaprtem intervalu se pojem zveznosti in pojem enakomerne zveznosti ujemata, saj velja naslednji izrek, ki ga navajamo brez dokaza. Bralec ga najde na primer v [8].

Izrek 3.2.13. *Če je funkcija zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$ zvezna, je na tem intervalu enakomerno zvezna.*

Izrek 3.2.13 ne velja za funkcije, ki so zvezne na odprtem intervalu. Poglejmo primer:

Primer 3.2.10. Funkcija $f(x) = 1/x$ je zvezna na odprtem intervalu $(0, 1)$, torej lahko za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsak $x \in (0, 1)$ najdemo tak δ, da bo $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ za vsak $y \in (x - \delta, x + \delta)$. Vendar pa je velikost tega δ močno odvisna od tega, kje na intervalu leži točka x — če je bliže krajišča 1, kjer se funkcija spreminja čedalje počasneje, je δ lahko bistveno večji kot če je x blizu krajišča 0, kjer se funkcija zelo hitro spreminja. Drugače povedano, za še tako majhen δ, bo razlika

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \right|$$

večja od poljubnega ε, če sta le x_1 in x_2 dovolj majhna in med seboj različna. ■

V preostanku tega razdelka bomo navedli nekaj lastnosti funkcij, zveznih na zaprtem intervalu, ki jih bomo kasneje še večkrat uporabili.

Izrek 3.2.14. *Funkcija f naj bo zvezna na intervalu $[a, b]$ in naj bo v krajiščih intervala različno predznačena: $f(a)f(b) < 0$. Potem obstaja vsaj ena točka $\xi \in (a, b)$, kjer je $f(\xi) = 0$.*

Geometrijsko je izrek preprosto utemeljiti: če je vrednost funkcije v krajiščih intervala nasprotno predznačena, je graf funkcije na obeh bregovih abscisne osi in mora, ker je neprekinjena krivulja, vsaj enkrat sekati abscisno os.

Pri dokazu izreka bomo uporabili *metodo bisekcije*, ki je uporabna tudi za numerično iskanje ničel funkcij.

Dokaz. Vzemimo, da je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$. Interval $[a, b]$ razpolovimo s točko $x_1 = (a + b)/2$. Če je $f(x_1) = 0$, smo ničlo že našli, če je $f(x_1) < 0$, funkcija zamenja znak na podintervalu $[x_1, b]$, sicer pa na $[a, x_1]$. Interval, na katerem funkcija zamenja znak, zopet razpolovimo s točko x_2. Če je $f(x_2) \neq 0$, izberemo podinterval, na katerem f zamenja znak. Če ta postopek nadaljujemo, dobimo zaporedje (x_n), s členi, ki so razpolovišča podintervalov, izberanih na vsakem koraku. Dolžina podintervala, ki ga izberemo na n-tem koraku je $(a-b)/2^n$ in na tem podintervalu so vsi členi od n-tega dalje, torej za vsak p velja:

$$|x_n - x_{n+p}| < (b-a)/2^n.$$

Zaporedje (x_n) zadošča Cauchyjevemu pogoju in je zato konvergentno. Njegovo limito označimo s ξ.

Pokažimo, da je ξ iskana ničla, da je torej $f(\xi) = 0$. Če bi veljalo $f(\xi) = \varepsilon > 0$, bi zaradi zveznosti funkcije f obstajal nek tak δ, da bi za vsak $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ veljalo

$$|f(x) - f(\xi)| = |f(x) - \varepsilon| < \varepsilon,$$

torej $f(y) > 0$. Po drugi strani pa iz konstrukcije števila ξ sledi, da so v vsaki njegovi okolici tako točke x, kjer je $f(x)$ pozitivna kot tudi točke, kjer je $f(x)$ negativna. Podobno se prepričamo, da ne more biti $f(x_0) < 0$, torej ostane le $f(x_0) = 0$. □

Definicija 3.2.8. Funkcija f je na množici A *omejena*, če je slika

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\} \subset \mathbb{R}$$

omejena množica.

Izrek 3.2.15. *Funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu, je na tem intervalu omejena.*

Dokaz: Recimo, da funkcija $f(x)$ na zaprtem intervalu $[a, b]$ ni navzgor omejena. Potem obstaja za vsak $n \in \mathbb{N}$ taka točka $x_n \in [a, b]$, da je $f(x_n) > n$. Tako dobljeno zaporedje (x_n) je omejeno, ker so vsi členi na intervalu $[a, b]$, torej ima vsaj eno stekališče $\xi \in [a, b]$. V točki xi funkcija f ne more biti zvezna, saj v vsaki okolici te točke obstajajo členi zaporedja (x_n), za katere je $f(x_n) > n$ za poljubno veliko število n in zato ne moremo najti tako majhnega števila δ, da bi neenačba $|f(\xi + h) - f(\xi)| < 1$ za vsak $|h| < \delta$. □

Množica vrednosti $f([a, b])$ zvezne funkcije je torej omejena množica, zato ima svojo natančno zgornjo mejo $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ in svojo natančno spodnjo mejo $\inf_{x\in[a,b]} f(x)$.

Izrek 3.2.16. *Funkcija f, ki je zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, zavzame v neki točki $x_m \in [a, b]$ svojo natančno spodnjo mejo m in v neki točki $x_M \in [a, b]$ svojo natančno zgornjo mejo M.*

Dokaz: Dokažimo, da funkcija zavzame svojo natančno zgornjo mejo $M = \sup\{f(x),\ x \in [a,b]\}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja kakšna točka $y_n = f(x_n)$, za katero velja

$$y_n > M - 1/n.$$

Tako imamo dve zaporedji: konvergentno zaporedje $(y_n) = (f(x_n))$ z limito M in omejeno zaporedje (x_n) s členi $\{x_n\} \subset [a,b]$. Naj bo ξ stekališče zaporedja (x_n). Ker je f zvezna na intervalu $[a,b]$, mora biti

$$M = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$$

in funkcija f v točki ξ zavzame svojo natančno zgornjo mejo d. $\square$

Izrek 3.2.17. *[Izrek o vmesnih vrednostih] Funkcija f, ki je zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$, na tem intervalu zavzame vsako vrednost med svojo natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M.*

Dokaz: Če je f konstantna funkcija, je $m = M$ in funkcija to vrednost tudi zavzame v vsaki točki intervala.

Če f ni konstantna funkcija, je $m < M$. Naj bo število $A \in (m, M)$. Pokazati moramo, da obstaja število $x_A \in [a,b]$, da je $f(x_A) = A$.

Po izreku 3.2.16 na $[a,b]$ obstajata točki x_m in x_M, za kateri je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$. Ker f ni konstantna funkcija, je $m \neq M$. Razlika $f(x) - A$ je na intervalu med x_m in x_M zvezna funkcija in v krajiščih zavzame vrednosti

$$f(x_m) - A = m - A < 0 \quad \text{in} \quad f(x_M) - A = M - A > 0,$$

ki sta nasprotno predznačni. Po Izreku 3.2.14 je med x_m in x_M vsaj ena točka x_A, kjer je $f(x_A) - A = 0$, torej je tam $f(x_A) = A$. $\square$

Zadnje tri izreke lahko na kratko povzamemo v obliki enega samega izreka

Izrek 3.2.18. *Zaprt intervala se z zvezno funkcijo preslika v zaprt interval.*

3.3 Pregled elementarnih funkcij

3.3.1 Algebraične funkcije

Funkcije delimo na *algebraične* in *transcendentne*. Med algebraične funkcije sodijo polinomi, racionalne funkcije, koreni in vse možne kombinacije naštetih funkcij. Natančneje:

Definicija 3.3.1. Funkcija f je *algebraična*, če odvisna spremenljivka $y = f(x)$ zadošča kakšni enačbi oblike

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x) = 0,$$

kjer so koeficient $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ polinomi spremenljivke x.

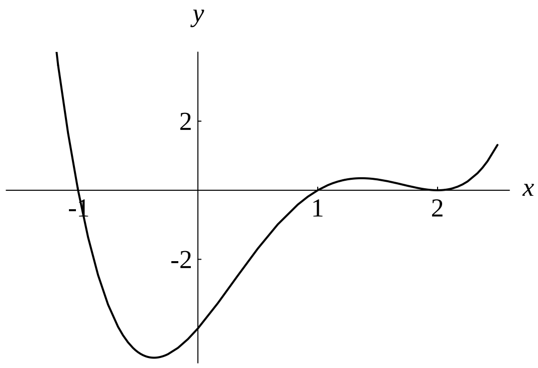
Na primer, funkcija $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je algebraična, ker $y = f(x)$ zadošča enačbi:

$$y^2 + x^2 - 1 = 0.$$

Vsote, produkti, kvocienti, potence in kompozitumi algebraičnih funkcij so spet algebraične funkcije.

Primer 3.3.1. Narišimo nekaj grafov algebraičnih funkcij:

1. Približno narišimo graf polinoma $p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)^2$.



Slika 3.13: Graf polinoma $p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)^2$.

Polinom p_4 ima dve navadni ničli pri $x = -1$ in $x = 1$ ter dvojno ničlo pri $x = 2$. Poglejmo si še predznak polinoma p_4 na vsakem od odsakov, na katere ničle razdelijo realno os:

$(-\infty,-1)$	$\{-1\}$	$(-1,1)$	$\{1\}$	$(1,2)$	$\{2\}$	$(2,\infty)$
$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+.$

Graf polinoma p je na sliki 3.13.

2. Narišimo graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x-2}.$$

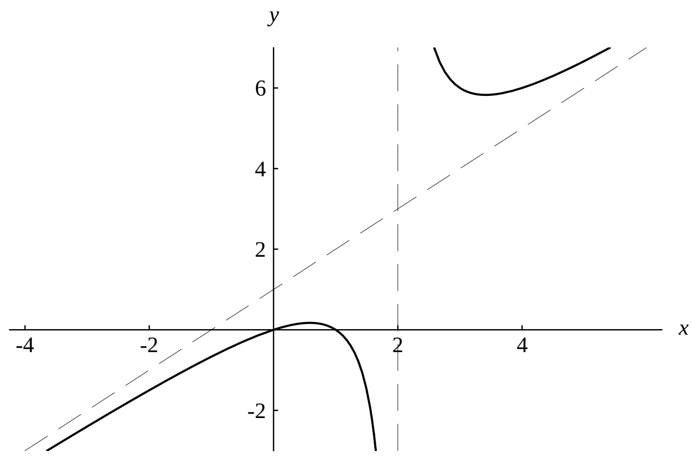
Ugotovimo:

(1) Funkcija je definirana za vsak x, razen za $x = 2$, kjer je pol.

(2) Funkcija ima vrednost 0 za tiste x, ki so rešitev kvadratne enačbe $x^2 - x = 0$, to je za $x = 0$ in za $x = 1$.

(3) Funkcija lahko spremeni predznak le v ničli ali v polu, zato je

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{za} \quad x \in (-\infty, 0) \\ > 0 & \text{za} \quad x \in (0, 1) \\ < 0 & \text{za} \quad x \in (1, 2) \\ > 0 & \text{za} \quad x \in (2, \infty). \end{cases}$$



Slika 3.14: Graf funkcije $(x^2 - x)/(x - 2)$

(4) Ker je $f(x) = x + 1 + 2/(x - 2)$ in je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x - 2} = 0,$$

je premica $y = x + 1$ poševna asimptota, ki se ji graf funkcije f približuje od spodaj, ko $x \to -\infty$ in od zgoraj, ko $x \to \infty$.

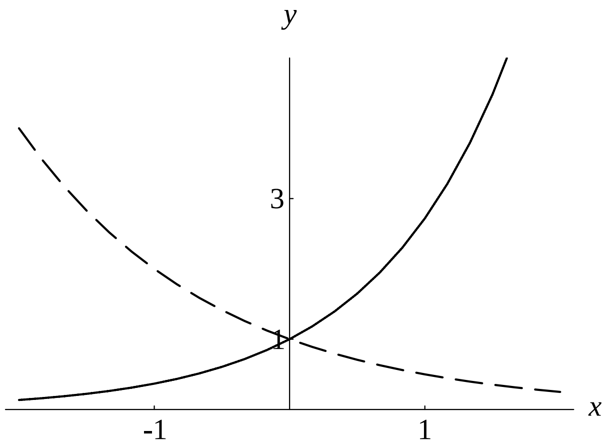
Graf funkcije f je na sliki 3.14. ■

3.3.2 Transcendentne funkcije

Funkcije, ki niso algebraične, so *transcendentne.* Med elementarne transcendentne funkcije sodijo *logaritem* in *eksponentna* funkcija, *kotne* ali *trigono-*

metrične funkcije, inverzne trigonometrične ali *ciklometrične* funkcije, *hiperbolične* funkcije in inverzne hiperbolične ali *area* funkcije. Seznama vseh transcendetnih funkcij s tem še zdaleč nismo izčrpali.

Eksponentna funkcija



Slika 3.15: Graf eksponentne funkcije a^x za $a = e$ in $a = 1/2$

Funkcija oblike

$$f(x) = a^x,$$

kjer je *osnova* a poljubno pozitivno realno število, ki ni enako 1, je *eksponentna funkcija*. Vemo že (glej definicijo 2.1.6), da je potenca enolično definirana za vsako realno vrednost eksponenta, zato je eksponentna funkcija definirana za vsak x. Zanjo sta značilna *adicijska izreka*:

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{in} \quad (a^x)^y = a^{xy}, \tag{3.3}$$

ki ju ne bomo dokazovali. Vrednost eksponentne funkcije je povsod pozitivna. Kadar je osnova $a > 1$, je eksponentna funkcija strogo naraščajoča, kadar pa je osnova $0 < a < 1$, je funkcija strogo padajoča. V matematiki je najpogosteje osnova eksponentne funkcije število e, ki smo ga definirali v razdelku 2.1.5, torej bomo najpogosteje srečevali eksponentno funkcijo $f(x) = e^x$.

Logaritemska funkcija

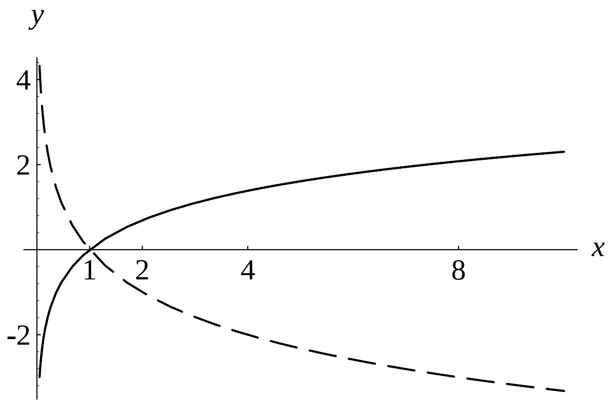
Eksponentni funkciji je je inverzna *logaritemska funkcija*. Dobimo jo tako, da v eksponentni funkciji $y = a^x$ zamenjamo spremenljivki x in y:

$$x = a^y \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad y = \log_a x.$$

Lastosti logaritemske funkcije lahko razberemo iz lastnosti eksponentne funkcije. Ker je eksponentna funkcija povsod pozitivna, je logaritemska definirana za $x > 0$. Kot eksponentna je tudi logaritemska funkcija za $a > 1$ strogo naraščajoča in za $a < 1$ strogo padajoča. Ničla logaritemske funkcije je pri $x = 1$, ker je $a^0 = 1$. Iz adicijskega izreka za eksponentno funkcijo (3.3) dobimo zvezo

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \tag{3.4}$$

ki velja pri poljubni osnovi a.



Slika 3.16: Graf logaritemske funkcije $\log_a x$ za $a = e$ in $a = 1/2$

Kot pri eksponentni funkciji je tudi pri logaritemski v matematiki najpogosteje osnova število e. Logaritmu, ki ima za osnovo število e, pravimo *naravni logaritem* in ga navadno pišemo brez osnove, torej je $\log x = \log_e x = \ln x$.

Kotne funkcije

Osnovni kotni ali trigonometrični funkciji sta sinus in kosinus, ki smo ju definirali v razdelku 3.2. Povezani sta z enačbo

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Za funkciji sin in cos velja

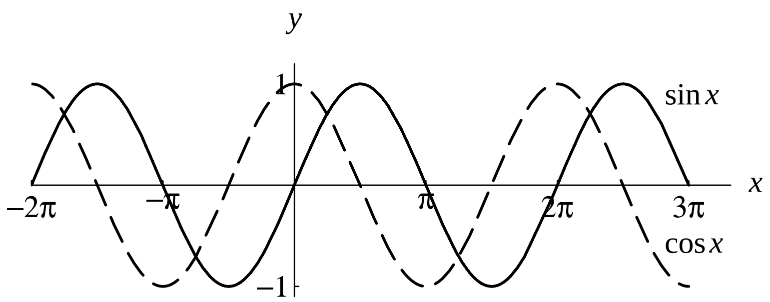
$$\sin(x+2\pi)=\sin x \quad \text{in} \quad \cos(x+2\pi)=\cos x,$$

zato sta sin in cos *periodični funkciji* s *periodo* 2π. Splošno definiramo:

Definicija 3.3.2. Funkcija $f(x)$ je *periodična* s periodo ω, če je

$$f(x+\omega)=f(x) \quad \text{za vsak } x\in\mathbb{R}.$$

Najmanjši periodi funkcije pravimo *osnovna perioda*.



Slika 3.17: Grafa funkcij $\sin x$ in $\cos x$

S pomočjo funkcij sin in cos sta definirani funkciji tangens in kotangens:

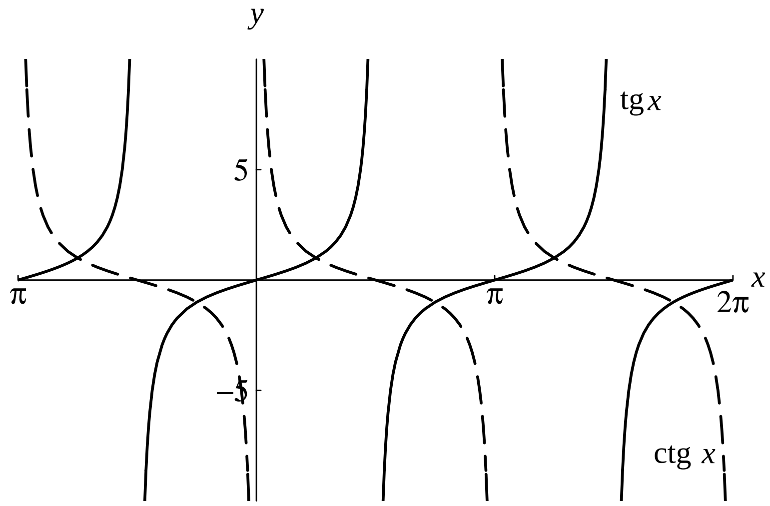
$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{in} \quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

in še sekans in kosekans, ki ju redkeje srečamo in ju zato tu ne bomo obravnavali. Tangens je definiran, povsod razen v točkah $\pi/2+k\pi$, kjer ima cos ničle, kotangens pa povsod razen v točkah $k\pi$, kjer ima sin ničle. Obe funkciji, tg in ctg sta periodični z osnovno periodo π.

Naštejmo nekaj znanih lastnosti kotnih funkcij:

1. Funkciji sin in cos sta omejeni na vsej realni osi, njuna zaloga vrednosti je interval $[-1,1]$, funkciji tg in ctg pa imata zalogo vrednosti enako $\mathbb{R}$.

2. Funkcija sin je liha, cos pa soda. Funkciji tg in ctg sta obe lihi.



Slika 3.18: Grafa funkcij $\operatorname{tg} x$ in $\operatorname{ctg} x$

3. Spomnimo se adicijskih izrekov za kotne funkcije:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{3.5}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{3.6}$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \tag{3.7}$$
$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{1 - \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} \tag{3.8}$$

4. Kotne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane. Zveznost funkcije sinus lahko ugotovimo s pomočjo adicijskega izreka, saj je

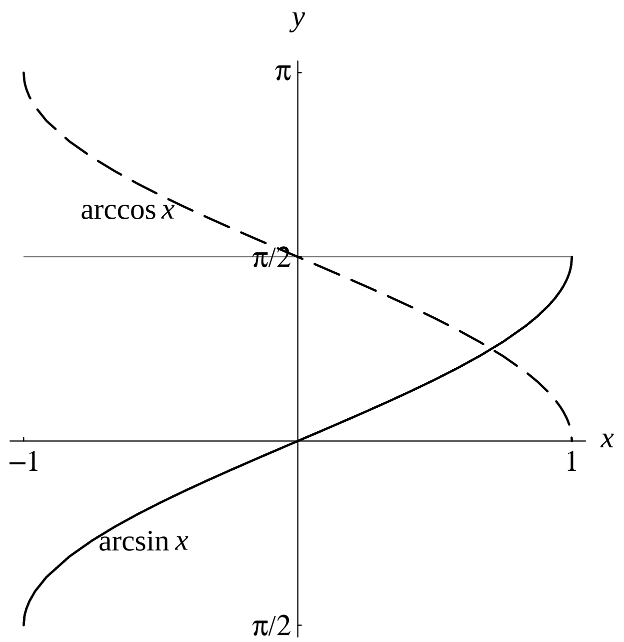
$$\lim_{h\to 0} \sin(x+h) = \sin x \lim_{h\to 0} \cos h + \cos x \lim_{h\to 0} \sin h = \sin x,$$

torej je funkcija sin zvezna na vsej realni osi. Ker je, zaradi adicijskega izreka, $\cos x = \sin(x+\pi/2)$, je tudi cos povsod zvezna funkcija. Funkciji tg in ctg sta tako kvocienta dveh zveznih funkcij in sta zato zvezni povsod, kjer sta definirani.

Ciklometrične funkcije

Ciklometrične funkcije so inverzne kotnim funkcijam. Pri njihovi definiciji moramo biti previdni, saj so kotne funkcije periodične in zato niso injektivne.

Pri definiciji inverzne funkcije se moramo omejiti na tak interval, kjer je kotna funkcija strogo monotona, torej injektivna.



Slika 3.19: Grafa funkcij $\arcsin x$ in $\arccos x$

Funkcija *arkus sinus*, ki jo pišemo kot arc sin, je inverzna funkcija sinusu, omejenem na interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Definirana je z relacijo

$$x = \sin y;\ \ y \in Z_{\arcsin} = [-\pi/2, \pi/2];\ \ x \in D_{\arcsin} = [-1, 1].$$

Funkcija arc sin je naraščajoča, liha in zvezna na celem svojem definicijskem območju.

Funkcija *arkus kosinus*, arc cos, je inverzna funkcija kosinusu, omejenem na interval $[0, \pi]$. Definirana je z relacijo $x = \cos y$, kjer je $y \in Z_{\arccos} = [0, \pi]$ in $x \in D_{\arccos} = [-1, 1]$. Je padajoča in zvezna na celem svojem definicijskem območju.

Iz zveze

$$x = \cos y = \sin(\pi/2 - y), \quad y \in [0, \pi]$$

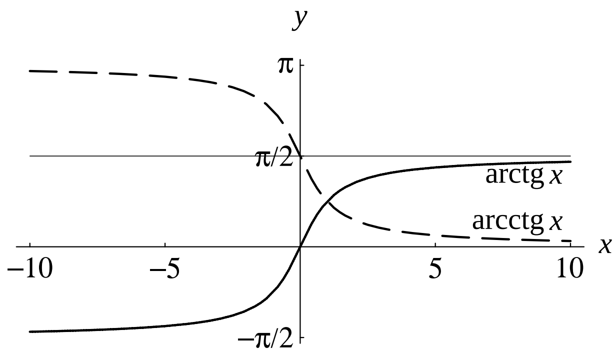
dobimo

$$y = \arccos x \quad \text{in} \quad \pi/2 - y = \arcsin x,$$

od koder sledi zveza med funkcijama arc sin in arc cos:

$$\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x = \pi/2.$$

Funkcija *arkus tangens*, arc tg, je inverzna funkcija tangensu, omejenem na interval $(-\pi/2, \pi/2)$ in je določena z relacijo $x = \operatorname{tg} y$, kjer je $y \in Z_{\operatorname{arc tg}} = (-\pi/2, \pi/2)$ in $x \in D_{\operatorname{arc tg}} = \mathbb{R}$. Je naraščajoča, liha in zvezna na celi množici $\mathbb{R}$. Funkcija *arkus kotangens*, arc ctg, pa je inverzna kotangensu na intervalu $(0, \pi)$, torej je določena z relacijo $x = \operatorname{ctg} y$, $y \in Z_{\operatorname{arc ctg}} = (0, \pi)$ in $x \in \mathbb{R}$ ter je padajoča in zvezna na celi množici $\mathbb{R}$.



Slika 3.20: Grafa funkcij arc tg x in arc ctg x

Podobno kot za arc sin in arc cos velja:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = \pi/2.$$

Hiperbolične funkcije

Hiperbolične funkcije so v marsičem podobne kotnim funkcijam. Osnovni hiperbolični funkciji sta *hiperbolični sinus*

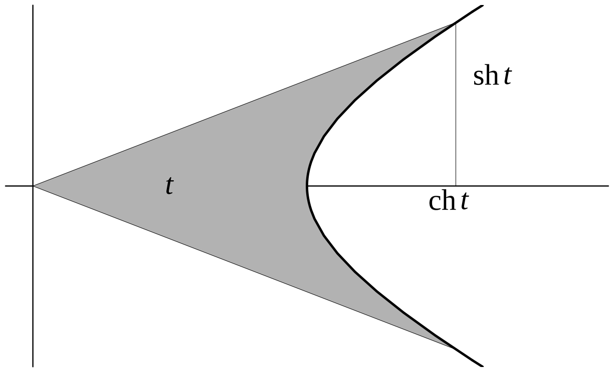
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

in *hiperbolični kosinus*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Funkciji sh in ch sta povezani s podobno enačbo kot sin in cos:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$



Slika 3.21: Zveza med točkami hiperbole in funkcijama sh in ch.

Točka s koordinatama $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ torej leži na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$. Hiperbolične funkcije bi lahko definirali podobno kot trigonometrične, tako kot kaže slika 3.21.

Poleg funkcij sh in ch sta še *hiperbolični tangens* in *hiperbolični kotangens*, ki sta definirana podobno kot pri kotnih funkcijah:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

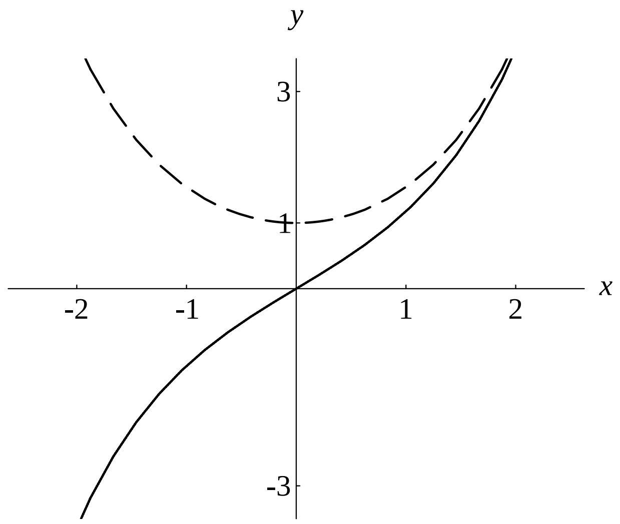
$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Vse hiperbolične funkcije so definirane in zvezne za vsa realna števila, razen cth, ki ni definirana za $x = 0$.

Hiperbolične funkcije imajo podobne lastnosti kot trigonometrične:

1. Funkcija sh je liha, navzgor in navzdol neomejena in strogo naraščajoča.
2. Funkcija ch je soda, navzdol omejena, za $x < 0$ strogo padajoča in za $x > 0$ strogo naraščajoča.
3. Funkcija th je liha, omejena in strogo naraščajoča.
4. Funkcija cth je liha, neomejena in strogo padajoča na $(-\infty, 0)$ in na $(0, \infty)$.

Za hiperbolične funkcije tudi veljajo podobni adicijski izreki kot za trigonometrične funkcije:



Slika 3.22: Grafa funkcij $\operatorname{sh} x$ in $\operatorname{ch} x$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \tag{3.9}$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \tag{3.10}$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \tag{3.11}$$

$$\operatorname{cth}(x+y) = \frac{1 + \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y}, \tag{3.12}$$

iz dobimo podobne relacije, kot smo jih že srečali pri trigonometričnih funkcijah:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \tag{3.13}$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x \tag{3.14}$$

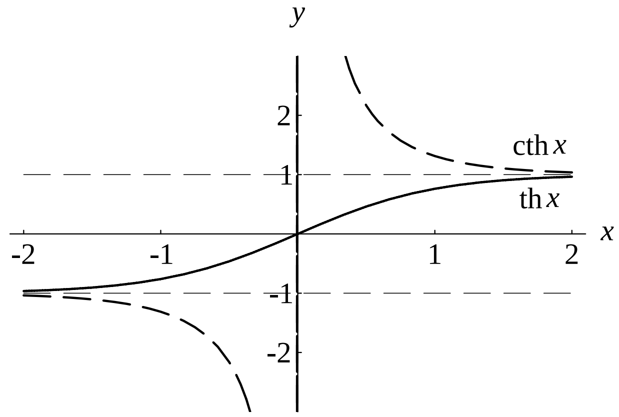
$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x \tag{3.15}$$

Dokažimo na primer adicijski izrek za sh. Izračunajmo izraz na desni:

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \tag{3.16}$$

$$= \frac{1}{4}\left((e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})\right) \tag{3.17}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2e^x e^y + 2e^{-x}e^{-y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right). \tag{3.18}$$



Slika 3.23: Grafa funkcij $\operatorname{th} x$ in $\operatorname{cth} x$

To je enako $\operatorname{sh}(x+y)$. Vsi ostali dokazi so podobni. □

Inverzne hiperbolične funkcije

Funkcije sh, th in cth so injektivne, zato obstajajo njihove inverzne funkcije. Funkcija $\operatorname{ch} x$ je strogo naraščajoča za $x > 0$ in soda, zato se pri definiciji inverzne funkcije omejimo na interval $[0, \infty)$, kjer je funkcija ch strogo monotona. Inverzne funkcije hiperboličnih funkcij imenujemo *area funkcije* in jih označujemo po vrsti z Ar sh, Ar ch, Ar th in Ar cth. Podobno kot se hiperbolične funkcije izražajo racionalno z eksponentno funkcijo, se obratne hiperbolične funkcije izražajo z logaritmom algebraičnih funkcij.

Primer 3.3.2. Izračunajmo funkciji $y = \operatorname{sh} x$ inverzno funkcijo Ar sh.

Inverzna funkcija zadošča relaciji $x = \operatorname{sh} y = (e^y - e^{-y})/2$, odtod

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Iz te enačbe izračunamo $e^y = x + \sqrt{1+x^2}$, in

$$y = \operatorname{Ar\,sh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Podobno lahko dobimo tudi ostale obratne hiperbolične funkcije izražene kot logaritme.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ar}\operatorname{ch} x &= \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\
\operatorname{Ar}\operatorname{th} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}; \quad |x| < 1 \\
\operatorname{Ar}\operatorname{cth} x &= \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}; \quad |x| > 1.
\end{aligned}
$$

■

Poglavje 4

Odvod

4.1 Definicija odvoda

Naj bo funkcija f definirana na intervalu (a, b) in x_0 točka s tega intervala. Vzemimo število h, dovolj majheno, da je tudi $x_0 + h \in (a, b)$ in

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

prirastek funkcijske vrednosti. *Diferenčni kvocient* funkcije f v točki x_0

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{h} = \varphi(x_0, h)$$

pove, kako hitro se v povprečju spreminja vrednost funkcije f med točkama $x_0 + h$ in x_0.

Definicija 4.1.1. Funkcija f je v točki x_0 *odvedljiva*, če obstaja limita diferenčnega kvocienta:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ki ji pravimo *odvod* funkcije f v točki x_0.

Odvod $f'(x_0)$ meri hitrost, s katero se vrednost funkcije spreminja v bližini točke x_0.

Primer 4.1.1. Izračunajmo odvode funkcij:

1. Za funkcijo $f(x) = x^2$ je diferenčni kvocient enak

$$\varphi(x,h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

Njegova limita obstaja v vsaki točki x in je enaka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \varphi(x,h) = 2x.$$

2. Vzemimo $f(x) = \sin x$. Potem je

$$\begin{aligned}\varphi(x,h) &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \varphi(x,h) &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x.\end{aligned}$$

Izračunajmo posebej limito:

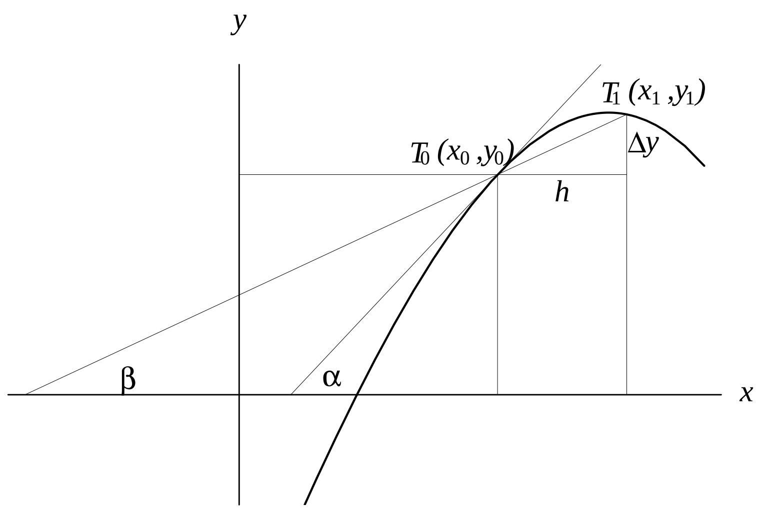
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} \\ &= (-1) \cdot \frac{0}{2} = 0,\end{aligned}$$

torej je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \varphi(x,h) = \sin x \cdot 0 + \cos x = \cos x.$$

■

Diferenčni kvocient je enak tangensu kota, ki ga premica skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ na grafu oklepa s pozitivnim delom osi x, torej smernemu koeficientu te premice. Ko $h \to 0$, ta premica (sekanta grafa) drsi proti tangenti. Funkcija je odvedljiva v točki x_0 natanko takrat, kadar ima njen graf v točki $(x_0, f(x_0))$ tangento, odvod $f'(x_0)$ pa je smerni koeficient te tangente.



Slika 4.1: Odvod funkcije

Lahko se zgodi, da v kakšni točki limita diferenčnega kvocienta sicer ne obstaja, obstaja pa leva limita:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Taka funkcija je v točki x_0 *odvedljiva z leve*, limita je *levi odvod* funkcije v točki x_0. Če obstaja desna limita:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

je f v točki x_0 *odvedljiva z desne*, limita pa je *desni odvod* funkcije v točki x_0.

Funkcija f je v točki x_0 odvedljiva natanko tedaj, kadar levi in desni odvod obstajata in sta enaka.

Primer 4.1.2. Odvedljivost funkcij:

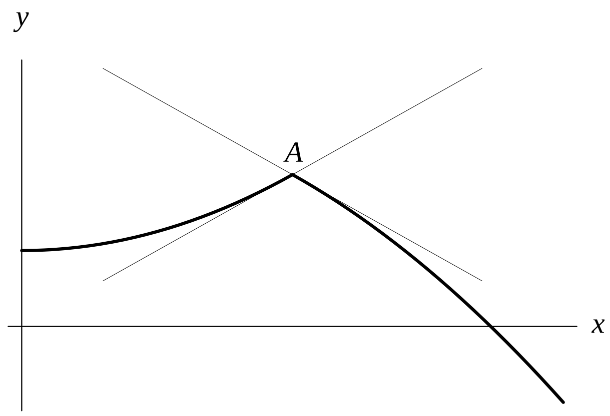
1. Naj bo $f(x) = |x|$. V točki $x_0 = 0$ je levi odvod enak

$$f'(0-0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

desni odvod pa je

$$f'(0+0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Funkcija v tej točki ni odvedljiva. To se na grafu funkcije pozna tako, da je v točki x_0 graf prelomljen.



Slika 4.2: Zvezna funkcija, ki ni odvedljiva, je pa odvedljiva z desne in z leve

Splošno velja: če je levi odvod v neki točki različen od desnega, graf funkcije v tej točki nima tangente. Če se točki približujemo z leve, drsi sekanta grafa proti premici s smernim koeficientom $f'(x_0 - 0)$ (včasih ji pravimo leva tangenta). Če se približujemo z desne, drse sekanta proti premici s smernim koeficientom $f'(x_0 + 0)$ (proti desni tangenti). V točki $A(x_0, y_0)$ se graf funkcije prelomi.

2. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

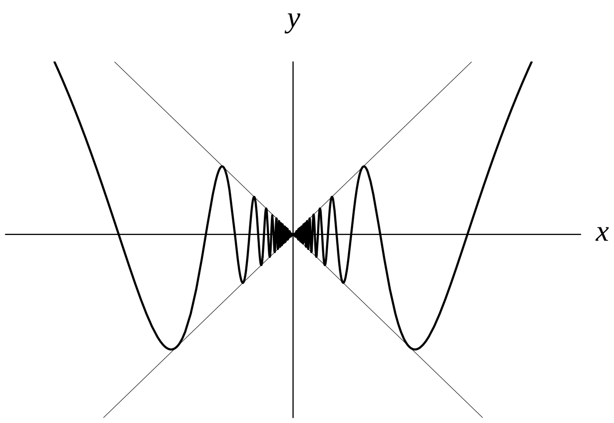
je v točki $x_0 = 0$ zvezna, saj je

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

vendar ni odvedljiva, saj limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin(1/h)}{h}=\lim_{h\to 0}\sin(1/h),$$

ne obstaja. Funkcija ni odvedljiva niti z desne niti z leve. Graf v tej točki nima ne leve ne desne tangente. ■



Slika 4.3: Graf funkcije $f(x) = x\sin 1/x$; f je v točki 0 zvezna, vendar ni odvedljiva niti z leve niti z desne

Kot kažeta funkciji v primeru 4.1.2, obstajajo funkcije, ki so zvezne, pa niso odvedljive. Obratno se ne more zgoditi:

Izrek 4.1.1. *Če je funkcija v neki točki odvedljiva, je v tej točki tudi zvezna.*

Dokaz. Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x_0. Ker je

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

je tudi

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)+0\cdot f'(x_0)=f(x_0)$$

in, zaradi izreka 3.2.3, je funkcija f zvezna v x_0. □

Na podoben način dokažemo, da je funkcija, ki je v neki točki odvedljiva z desne (ali z leve), tudi zvezna z desne (ali z leve).

Definicija 4.1.2. Funkcija f je *odvedljiva na odprtem intervalu* (a, b), če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$. Na *zaprtem intervalu* $[a, b]$ je odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$ in če v levem krajišču a obstaja desni odvod, v desnem krajišču b pa levi odvod.

Iz izreka 4.1.1 sledi, da je funkcija, ki je na nekem intervalu odvedljiva, na tem intervalu tudi zvezna. Njen odvod $f'(x)$ je tudi funkcija, definirana na tem intervalu.

4.2 Pravila za odvajanje

1. Konstantna funkcija $f(x) = C$ je odvedljiva v vsaki točki, njen odvod je:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$
2. Identična funkcija $f(x) = x$ je odvedljiva v vsaki točki, njen odvod je:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1.$$
3. Če sta f in g odvedljivi funkciji, sta odvedljivi tudi vsota $f + g$ in razlika $f - g$ in velja:
$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{in} \quad (f - g)' = f' - g'.$$
Dokaz. Naj bo $F = f + g$. Diferenčni kvocient funkcije F v točki x je
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$
V limiti, ko $h \to 0$, leva stran konvergira proti $F'(x)$, desna pa proti $f'(x) + g'(x)$. Podobno velja za odvod razlike. □

V posebnem primeru, ko je g konstantna funkcija, od tod sledi:
$$(f + C)' = f'.$$
Pravila za odvajanje vsote lahko posplošimo na vsoto n funkcij:
$$(f_1 + \cdots + f_n)' = f_1' + \cdots + f_n'.$$

4. Produkt odvedljivih funkcij f in g je odvedljiva funkcija in velja

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Dokaz. Naj bo $F = fg$. Diferenčni kvocient za funkcijo F je

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Ko $h \to 0$, konvergirata ulomka proti $f'(x)$ in $g'(x)$, $g(x+h)$ pa proti $g(x)$. □

Če je ena od funkcij konstanta, iz tega pravila sledi:

$$(Cf)' = Cf'.$$

Tudi pravilo za odvod produkta dveh funkcij lahko posplošimo na produkt več funkcij:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$$

Primer 4.2.1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $f(x) = x^n = x \cdot x \cdots x$. Potem je

$$f'(x) = 1 \cdot x \cdots x + x \cdot 1 \cdots x + \cdots + x \cdot x \cdots 1 = nx^{n-1}.$$

■

5. Kvocient f/g dveh odvedljivih funkcij f in g je odvedljiva funkcija v vsaki točki, kjer je $g \neq 0$, in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Dokaz. Diferenčni kvocient za funkcijo f/g je

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) =$$

$$\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+h)-g(x)]}{hg(x)g(x+h)} =$$

$$\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)}.$$

Ko gre $h \to 0$, konvergirata ulomka v števcu proti $f'(x)$ in $g'(x)$, $g(x+h)$ pa proti $g(x)$. □

Primer 4.2.2. Izračunajmo odvode

(1) Odvod potence z negativnim eksponentom:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}:$$

$$f'(x) = \frac{0\cdot x^n - 1\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

(2) Odvod racionalne funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}:$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^3-1)-3x^2(x^2+1)}{(x^3-1)^2} = \frac{-x^4-3x^2-2x}{(x^3-1)^2}.$$

■

6. Če je funkcija $u(x)$ odvedljiva v točki x_0 in funkcija $f(u)$ odvedljiva v točki $u_0 = u(x_0)$, je sestavljena funkcija $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ odvedljiva v točki x_0 in je

$$(f(u(x_0)))' = f'(u_0)\cdot u'(x_0). \tag{4.1}$$

Dokaz. Izračunajmo diferenčni kvocient v točki x_0 za funkcijo $F(x) = f(u(x))$:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{f(u(x_0+h))-f(u(x_0))}{h}. \tag{4.2}$$

Naj bo

$$k = u(x_0+h) - u(x_0).$$

Ker je u odvedljiva v točki x_0, je tudi zvezna, in zato je

$$\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0}[u(x_0+h) - u(x_0)] = 0.$$

Od tod sledi:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{f(u_0+k) - f(u_0)}{k} \cdot \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}.$$

V limiti, ko $h \to 0$, gre tudi $k \to 0$ in dobimo enačbo (4.1). □

Primer 4.2.3. Vzemimo, funkcijo $f(x)$, katere odvod poznamo. Izračunajmo odvod funkcije $g(x) = f(x-a)$ (tj. funkcije, ki jo dobimo, če f premaknemo za a vzdolž osi x). V tem primeru je $g(x) = f(u(x))$, kjer je $u(x) = x - a$, in $u'(x) = 1$, torej

$$g'(x) = f'(u(x))u'(x) = f'(u(x)) = f'(x-a).$$

V primeru 4.1.1 smo izračunali, da je $(\sin x)' = \cos x$. Zaradi

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

je

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x. \tag{4.3}$$

■

7. Naj bo f injektivna funkcija, tako da obstaja njena inverzna funkcija f^{-1}. Če je f odvedljiva v točki x in je $f'(x) \neq 0$, je f^{-1} odvedljiva v točki $y = f(x)$ in velja:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}. \tag{4.4}$$

Dokaz. Ker sta si funkciji inverzni, je $F(x) = f^{-1}(f(x)) = x$. Odvod funkcije $F(x) = x$ je enak 1, iz pravila za posredno odvajanje sledi:

$$1 = F'(x) = (f^{-1})'(y) \cdot f'(x)$$

□

Primer 4.2.4. Potenca x^n, $n \geq 1$ je odvedljiva funkcija, njen odvod je $(x^n)' = nx^{n-1} \neq 0$ za vsak $x \neq 0$, zato je tudi njej inverzna funkcija $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ odvedljiva v vsaki točki $y = x^n \neq 0$ in velja

$$(y^{1/n})' = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}.$$

Če je p/q poljubno racionalno število, je $x^{p/q} = (x^{1/q})^p$, in po pravilu za posredno odvajanje je

$$(x^{p/q})' = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{1/q-1} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}. \tag{4.5}$$

Formule, ki smo jih dobili v primerih 4.2.1 in 4.2.2 so samo posebni primeri tega splošnega pravila. ■

4.3 Odvodi elementarnih funkcij

Odvod eksponentne funkcije

$$(a^x)' = a^x \log a \tag{4.6}$$

Dokaz. Ker je

$$\frac{a^{x+h} - a^h}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h},$$

je odvod enak

$$(a^x)' = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}. \tag{4.7}$$

Da bi izračunali zgornjo limito, definirajmo novo spremenljivko s predpisom $t = a^h - 1$. Zanjo velja $t \to 0$ obenem ko $h \to 0$. Ker je $h = \log(1+t)/\log a$, je

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{t \log a}{\log 1 + t} = \frac{\log a}{\log(1+t)^{1/t}},$$

torej je v limiti

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \frac{\log a}{\lim_{t \to 0} \log(1+t)^{1/t}} = \log a$$

(glej primer 3.2.7). Ko to vstavimo v enačbo (4.7), dobimo (4.6). □

Posebno preprosta je enačba (4.6) v primeru, ko je $a = e$, saj je

$$(e^x)' = e^x.$$

Odvod logaritemske funkcije

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \tag{4.8}$$

Dokaz. Ker je logaritem $y = \log_a x$ definiran kot inverzna funkcija potence $x = a^y$, je

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a}.$$

□

Poseben primer tega pravila je odvod naravnega logaritma

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

Odvod potence

$$(x^r)' = rx^{r-1} \tag{4.9}$$

Dokaz. Odvod potence x^r z racionalnim eksponentom r smo že izračunali v primeru 4.2.4. Veljavnost formule (4.9) za realen eksponent dokažemo tako, da potenco, zaradi $x^r = e^{r \log x}$, odvajamo kot posredno funkcijo:

$$(x^r)' = (e^{r \log x})' = e^{r \log x}(r \log x)' = x^r \frac{r}{x} = rx^{r-1}.$$

□

Odvodi kotnih funkcij

$$(\sin x)' = \cos x \tag{4.10}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{4.11}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \tag{4.12}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \tag{4.13}$$

Dokaz. Formulo (4.10) smo dokazali že v primeru 4.1.1, formulo (4.11) pa v primeru 4.2.3.

Odvod funkcije $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ dobimo s pravilom za odvajanje kvocienta

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Enako izpeljemo tudi formulo za odvod funkcije $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

$\square$

Odvodi ciklometričnih funkcij

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.14}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.15}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{4.16}$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{4.17}$$

Dokaz. Formulo (4.14) dobimo z uporabo pravila za odvod inverzne funkcije:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Ker je $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ za vse $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, dobimo

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Formulo (4.15) dobimo najenostavneje, če odvajamo identiteto

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

in dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (\arccos x)' = 0.$$

Za odvod funkcije arc tg uporabimo pravilo za odvod inverzne funkcije:

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Odvod funkcije arc ctg dobimo podobno. □

Odvodi hiperboličnih funkcij

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \tag{4.18}$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \tag{4.19}$$
$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \tag{4.20}$$
$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \tag{4.21}$$

Dokaz. Formule (4.18–4.21) dobimo s pomočjo pravila za odvod posredne funkcije in definicije hiperboličnih funkcij. □

Primer 4.3.1. S pomočjo pravil za odvajanje in tabele 4.1 lahko izračunamo odvod vsake funkcije, ki je sestavljena le iz teh elementarnih funkcij. Naredimo nekaj zgledov:

1. Racionalno funkcijo
$$f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 - 2}$$
odvajamo kot kvocient
$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 2) - 2x(3x + 1)}{(x^2 - 2)^2} = -\frac{3x^2 + 2x + 6}{(x^2 - 2)^2}, \quad |x| \neq \sqrt{2}.$$

2. Odvod kvadratnega korena poljubne odvedljive funkcije $y = \sqrt{f(x)}$ dobimo po pravilu za odvajanje posredne funkcije
$$y' = \frac{1}{2}[f(x)]^{-1/2} f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

funkcija	odvod	opomba
x^r	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \log a$	$a > 0$
e^x	e^x	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$	$a > 0, x > 0$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 \leq x \leq 1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 \leq x \leq 1$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arc\,ctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
$\operatorname{cth} x$	$\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$

Tabela 4.1: Odvodi elementarnih funkcij

3. Funkcijo $y = \sin\sqrt{1+x^2}$ odvajamo kot posredno funkcijo

$$y' = \cos\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)' =$$

$$\cos\sqrt{1+x^2}\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \cos\sqrt{1+x^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Določimo še vrednost odvoda za $x = 1$:

$$y'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}.$$

4. Tudi funkcijo $y = \log(x + \sqrt{x^2+a})$ odvajamo kot posredno funkcijo. Naj bo $u = x + \sqrt{x^2+a}, y = \log u$, pa dobimo

$$y' = (\log u)'u' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

5. Algebraično funkcijo, ki jo določa implicitna relacija

$$4x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x + 4y - 6 = 0, \tag{4.22}$$

najenostavneje odvajamo tako, da enačbo (4.22) odvajamo po spremenljivki x in pri tem upoštevamo, da je y odvisen od x:

$$8x - 5y - 5xy' + 4yy' - 3 + 4y' = 0,$$

od koder dobimo odvod

$$y' = \frac{8x - 5y - 3}{5x - 4y - 4}.$$

6. Funkcijo $y = x^x$ najlaže odvajamo tako, da jo najprej logaritmiramo

$$\log y = x \log x,$$

nato pa pri odvajanju upoštevamo na x upoštevamo, da je $\log y$ posredna funkcija spremenljivke x, torej

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

in od tod

$$y' = y(1 + \log x) = x^x(1 + \log x).$$

■

4.4 Diferencial

Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu (a, b), točki x in $x + \Delta x$ na tem intervalu in $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ sprememba vrednosti funkcije f, ko se x spremeni za Δx. Odvod $f'(x)$ lahko zapišemo kot

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Razlika med odvodom in diferenčnim kvocientom

$$\eta = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

gre proti 0, ko $\Delta x \to 0$. Prirastek funkcijske vrednosti

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \eta \Delta x$$

je torej pri majhni spremembi Δx približno enak

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Običajno pišemo $\Delta x = dx$, izrazu

$$dy = f'(x)dx$$

pravimo *diferencial* funkcije $f(x)$.

Odvod se z diferencialom izraža kot

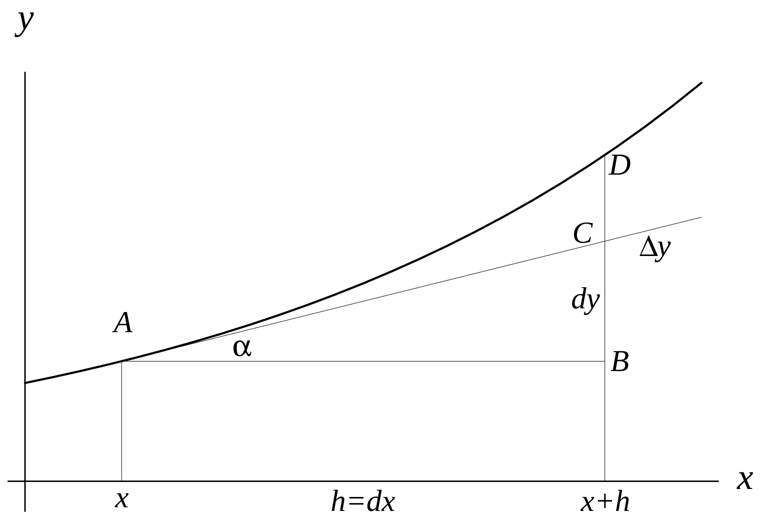
$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Ta zapis za odvod ima nekaj prednosti, saj je neposredno razvidno, po kateri spremenljivki odvajamo, pa tudi nekatera pravila za odvajanje se v tej obliki pregledneje zapišejo. Na primer, pravilo za posredno odvajanje zapišemo: če je $y = f(u)$ in $u = u(x)$, je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

pravilo za odvod inverzne funkcije $x = f^{-1}(y)$ pa kot

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$



Slika 4.4: Diferencial funkcije

S slike 4.4 vidimo, da je sprememba neodvisne spremenljivke enaka $AB = h$, prirastek funkcijske vrednosti $BD = \Delta y$ in diferencial enak $BC = y'\,dx = dy$. Diferencial funkcije v določeni točki je enak spremembi ordinate tangente na graf funkcije v točki A pri spremembi abscise za dx. S slike tudi vidimo, da se pri odvedljivi funkciji Δy in dy razlikujeta tem manj, čim bliže ležita točki A in D oz. čim manjša je sprememba dx neodvisne spremenljivke.

Z diferenciali si mnogokrat pomagamo pri računanju približnih vrednosti funkcij, saj velja

$$f(x + dx) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,dx.$$

Primer 4.4.1. Izračunajmo približno vrednost potence $(1.02)^{12}$. Zanima nas vrednost funkcije x^{12} v točki $1.02 = 1 + 0.2$

$$f(1 + 0.2) = f(1) + f'(1) \cdot 0.02 = 1 + 12 \cdot 0.02 = 1.24.$$

Rezultat, ki smo ga dobili, si lahko razlagamo takole: pri povprečni mesečni inflaciji 2% je letna inflacija približno enaka 24%. Vendar je tak približek uporaben samo, če je dx majhen (tj. pri majhni mesečni inflaciji). Večji ko je dx, večjo napako smo pri aproksimaciji naredili, tako da pri velikih vrednostih dx približek s pravo vrednostjo nima več nobene prave zveze (v našem primeru smo že v območju vprašljive vrednosti približka — letna inflacija pri povprečni mesečni inflaciji 2% je enaka 26.8% in napaka 2.6% je lahko v tem primeru že zavajajoča). ■

4.5 Višji odvodi

Če je funkcija f odvedljiva na nekem intervalu, je njen odvod f' nova funkcija, definirana na tem intervalu, ki je lahko odvedljiva. Odvod te funkcije

$$f'' = (f')'$$

imenujemo *drugi odvod* funkcije f. Če je tudi ta odvedljiv, je njegov odvod $f''' = (f'')'$ *tretji odvod* funkcije f. Na splošno pravimo: če je $(n-1)$-vi odvod funkcije f odvedljiva funkcija, je njen odvod

$$(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$$

n-ti odvod funkcije f (ali odvod n-tega reda), funkcija f pa je *n-krat odvedljiva*. Za funkcijo, ki ima odvod poljubnega reda, pravimo, da je neskončnokrat odvedljiva.

Primer 4.5.1. Neskončnokrat odvedljive funkcije:

1. Vsak polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

je neskončnokrat odvedljiva funkcija na celi množici $\mathbb{R}$, saj je

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \\ \ldots & & \\ f^{(n)} & = & n(n-1)\cdots 1 \cdot a_n = n!a_n \\ f^{(m)} & = & 0 \text{ za vsak } m > n \end{array}$$

2. Funkciji $\sin x$ in $\cos x$ sta neskončnokrat odvedljivi na celi množici $\mathbb{R}$, njuni odvodi so:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \ (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin(x+\pi); \quad (\cos x)'' = -\cos x = \cos(x+\pi)$$

in za vsak $n \in \mathbb{N}$:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \qquad (4.23)$$

Formuli (4.23) brez težav dokažemo z matematično indukcijo. Podrobnosti prepuščamo bralcu. ■

Če je funkcija f dvakrat odvedljiva, je njen *diferencial drugega reda* enak

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)\,dx)'dx = f''(x)\,dx^2,$$

odvod drugega reda se z diferencialom zapiše

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Podobno z diferenciali višjega reda izrazimo višje odvode:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Drugi odvod sestavljene funkcije. Drugi odvod posredne funkcije $y = f(u),\ u = u(x)$ dobimo tako, da prvi odvod, torej funkcijo

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)u'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

odvajamo in dobimo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(u)(u'(x))^2 + f'(u)u''(x) = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Podobno lahko izračunamo višje odvode posrednih funkcij.

Višji odvodi produkta. Vzemimo n-krat odvedljivi funkciji u in v. Odvodi produkta $y = uv$ so

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv' \\ y'' &= u''v + 2u'v' + uv'' \\ y''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v''' \\ \dots \end{aligned}$$

in splošno

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) u^{(n-k)} v^{(k)}. \tag{4.24}$$

Tudi dokaz formule (4.24) z matematično indukcijo prepuščamo bralcu.

Drugi odvod inverzne funkcije. Naj bo f dvakrat odvedljiva injektivna funkcija. Inverzna funkcija f^{-1} je določena z relacijo

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Če to enačbo enkrat odvajamo in pišemo $f^{-1}(x) = y$, dobimo (tako kot pri izpeljavi formule (4.4) za odvod inverzne funkcije):

$$f'(y) \cdot (f^{-1})'(x) = f'(y) \cdot y' = 1.$$

Če enačbo odvajamo še enkrat in upoštevamo formulo (4.4), dobimo

$$(f''(y) \cdot y') \cdot y' + f'(y)y'' = f''(y) \cdot (y')^2 + f'(y) \cdot y'' = 0,$$

torej je drugi odvod enak

$$(f^{-1})''(x) = y'' = \frac{-f''(y) \cdot (y')^2}{f'(y)} = \frac{-f''(y)}{(f'(y))^3}.$$

4.6 Lastnosti odvedljivih funkcij

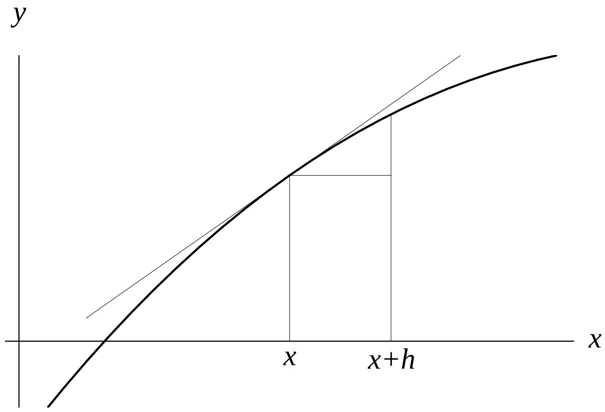
Naj bo f odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$. Če je v neki točki $x \in (a, b)$ odvod $f'(x)$ pozitiven, torej

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0,$$

mora biti za dovolj majhen h tudi diferenčni kvocient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0.$$

Razlika funkcijskih vrednosti $f(x+h) - f(x)$ je negativna, če je h negativen, in pozitivna, če je h pozitiven. To pa pomeni, da funkcijska vrednost ob prehodu skozi točko x narašča — v točkah levo od točke x (tj. točkah $(x+h)$, kjer



Slika 4.5: Funkcija $f(x)$ ob prehodu skozi točko x narašča.

je h negativen) je manjša kot $f(x)$, v točkah desno od x (tj. točkah $(x+h)$, kjer je h pozitiven) pa je večja kot $f(x)$ (glej sliko 4.5).

Na podoben način se prepričamo, da funkcijska vrednost ob prehodu skozi točko, kjer je odvod negativen, pada.

Težje je ugotoviti, kaj se dogaja s funkcijsko vrednostjo ob prehodu skozi točko x_0, kjer je $f'(x_0) = 0$. V takih točkah je tudi diferencial funkcije, ki je ocena za funkcijsko spremembo, enak 0, torej se funkcijska vrednost ob prehodu skozi tako točko spreminja zelo počasi. Točki x_0, v kateri je odvod $f'(x_0) = 0$, pravimo *kritična* ali *stacionarna* točka funkcije f.

4.6.1 Lokalni ekstremi

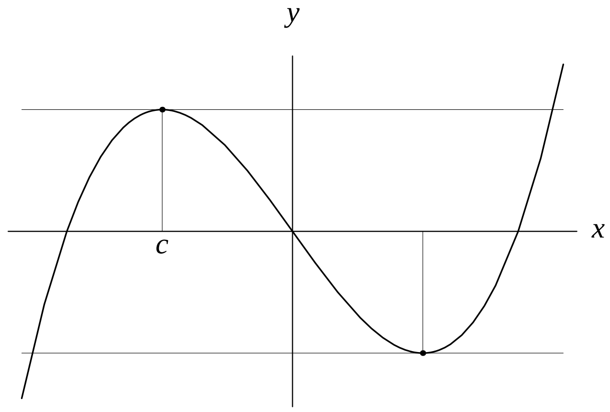
Definicija 4.6.1. Funkcija f ima v točki c *lokalni maksimum*, če obstaja tako število $\delta > 0$, da je $f(x) \leq f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Če je $f(x) < f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, razen za $x = c$, je v točki c *strogi maksimum* funkcije f.

Kadar obstaja število $\delta > 0$, za katerega je $f(x) \geq f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, ima funkcija f v točki c *lokalni minimum.* Če je $f(x) > f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, razen za $x = c$, je v točki c *strogi minimum* funkcije f.

Primer 4.6.1. Funkcija $f(x) = |x|$ ima v točki $x = 0$ strogi lokalni minimum, saj je za vsak $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ in je $f(0) = 0$. ■

Lokalni minimum in lokalni maksimum imenujemo s skupno besedo *lokalni ekstrem*. Pridevnik *lokalni* pomeni, da nas zanima obnašanje funkcije le v bližini določene točke. Funkcija lahko doseže v točki, ki je od točke c, kjer je na primer lokalni maksimum, oddaljena več kot δ vrednost, ki je večja od vrednosti $f(c)$, in ima lahko tudi več lokalnih maksimumov in več lokalnih minimumov.

Izrek 4.6.1. Fermat[1] *Če je funkcija f* odvedljiva*, je točka c, v kateri ima lokalni ekstrem, kritična točka, torej je $f'(c) = 0$.*



Slika 4.6: Odvod funkcije mora biti enak 0 v točkah ekstrema

Dokaz. Recimo, da ima f v točki c lokalni maksimum. Za vse x dovolj blizu c mora biti $f(x) \leq f(c)$, zato je levi odvod v točki c

$$f'(c-0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

desni odvod pa

$$f'(c+0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Ker je funkcija odvedljiva, mora biti levi odvod enak desnemu, kar je mogoče le, če je $f'(c) = 0$.

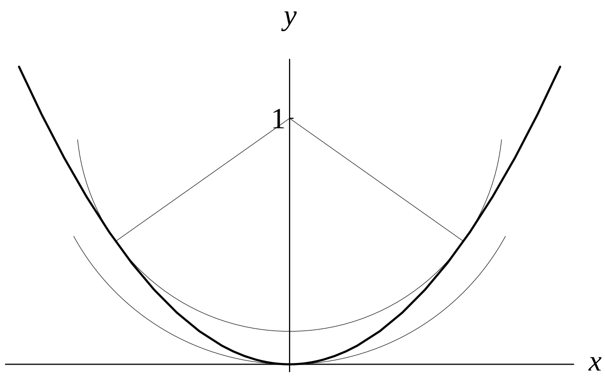
[1]Pierre Fermat (1601–1665), francoski matematik, poznan predvsem po svojih rezultatih v teoriji števil. Od njegovih trditev je verjetno najbolj slaven pred kratkim dokazani *zadnji Fermatov izrek*.

Dokaz za minimum je podoben. □

Pogoj $f'(c) = 0$ iz Fermatovega izreka je *potreben pogoj za obstoj ekstrema*, vendar pa ni zadosten. Na primer, funkcija $f(x) = x^3$ ima v točki 0 odvod enak 0, kljub temu pa v tej točki nima ekstrema, saj je $x^3 < 0$ za $x < 0$ in $x^3 > 0$ za $x > 0$.

Primer 4.6.2. Uporaba lokalnega ekstrema:

1. Poiščimo točko na krivulji $y = x^2$, ki je najmanj oddaljena od točke $(0, 1)$ (slika 4.7).



Slika 4.7: Razdalja med točko na paraboli in točko $(0, 1)$

Razdalja od točke (x, x^2) na krivulji do točke $(0, 1)$ je enaka

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$

Funkcija $d(x)$ je povsod definirana (izraz pod korenom je vedno pozitiven) in odvedljiva, torej ima lokalne ekstreme v kritičnih točkah:

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = 0.$$

Ta enačba ima tri rešitve, zato imamo tri kritične točke:

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Geometrijski razmislek pove, da v eni (ali več) od teh kritičnih točk funkcija res zavzame najmanjšo vrednost. Ker je

$$d(x_1) = 1, \quad d(x_2) = d(x_3) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

sta najmanj oddaljeni od točke $(0,1)$ točki

$$T_1(1/\sqrt{2}, 1/2) \quad \text{in} \quad T_2(-1/\sqrt{2}, 1/2),$$

njuna oddaljenost je $d(x_2) = d(x_3) = \sqrt{3}/2$.

2. Eden od mnogih fizikalnih zakonov, ki jih lahko obravnavamo s pomočjo lokalnega ekstrema kakšne funkcije, je odbojni zakon. Žarek svetlobe z virom v točki A se odbije od ravnega zrcala proti točki B. Pot, ki jo žarek pri tem opiše, je lomljena črta, sestavljena iz dveh daljic: AC in CB, kjer je C točka na zrcalu. Po Fermatovem načelu, znanem iz fizike, svetloba potuje tako, da je potreben čas za prehod iz ene do druge točke najkrajši. Točko C, kjer se svetloba na zrcalu odbije, moramo določiti tako, da bo vsota dolžin $|AC| + |CB|$ najmanjša. Postavimo koordinatni sistem tako, da bo zrcalo na osi x, točka A pa na osi y: $A(0,a)$ (slika 4.8). Če je $B(c,d)$, moramo torej določiti x v $C(x,0)$ tako, da bo imela funkcija

$$d(x) = d_1(x) + d_2(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + d^2}$$

minimalno vrednost. Odvod je

$$d'(x) = \frac{x}{d_1(x)} - \frac{c-x}{d_2(x)}.$$

Kritična točka je tam, kjer je $d'(x) = 0$:

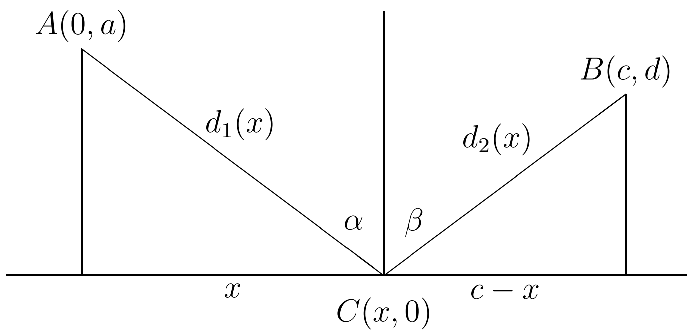
$$\frac{x}{d_1(x)} = \frac{c-x}{d_2(x)}.$$

Na levi strani enačbe je ravno sinus vpadnega kota α, na desni pa sinus odbojnega kota β:

$$\sin\alpha = \sin\beta.$$

Ker sta oba kota ostra, od tod sledi dobro znani odbojni zakon, ki pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu. ■

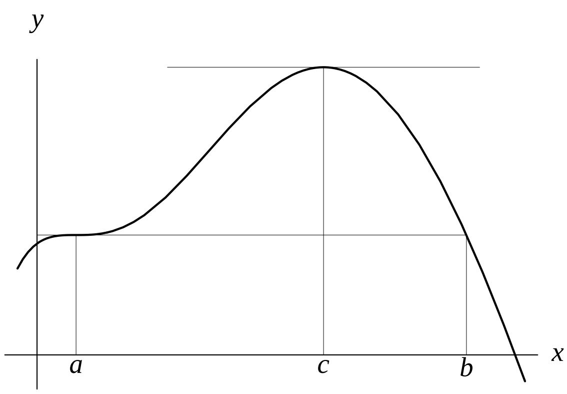
Pozor! Funkcija ima lahko lokalni ekstrem tudi v točki, ki ni kritična točka — namreč takrat, kadar v točki lokalnega ekstrema ni odvedljiva. Tak je ekstrem funkcije $f(x) = |x|$ v primeru 4.6.1.



Slika 4.8: Odboj svetlobe

4.6.2 Odvedljive funkcije na zaprtem intervalu

Izrek 4.6.2. Rolle[2] *Funkcija f, ki je odvedljiva na zaprtem intervalu $[a, b]$ in ima v krajiščih enaki vrednosti $f(a) = f(b)$, ima na intervalu (a, b) vsaj eno kritično točko.*



Slika 4.9: Rollov izrek

Dokaz. Ker je funkcija f odvedljiva na $[a, b]$, je na tem intervalu zvezna. Po izreku 3.2.15 je omejena, po izreku 3.2.16 pa na $[a, b]$ zavzame svojo natančno spodnjo mejo m in svojo natančno zgornjo mejo M. Če je $m = M$,

[2] Michel Rolle (1652–1719), francoski matematik.

je funkcija konstantna in je njen odvod enak 0 na celem intervalu. Če pa je $m < M$, zavzame funkcija f vsaj eno od vrednosti m in M v neki notranji točki $c \in (a, b)$. V točki c je v tem primeru lokalni ekstrem. Ker je f odvedljiva, iz Fermatovega izreka sledi, da je $f'(c) = 0$, torej je c kritična točka. □

Če ima funkcija v obeh krajiščih intervala isto vrednost, je povprečna sprememba funkcijske vrednosti na intervalu enaka 0, Rollov izrek trdi, da je v neki točki na intervalu odvod enak tej povprečni vrednosti spremembe. Naslednji izrek pove, da to pravzaprav velja za vsako odvedljivo funkcijo — vedno obstaja neka točka na intervalu, v kateri je odvod enak povprečni spremembi funkcijske vrednosti.

Izrek 4.6.3. Lagrange[3] *Če je f odvedljiva funkcija na končnem intervalu $[a, b]$, obstaja na tem intervalu vsaj ena točka c, kjer je*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.25}$$

Dokaz. Definirajmo funkcijo g:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Funkcija g je odvedljiva povsod na intervalu $[a, b]$, njen odvod je

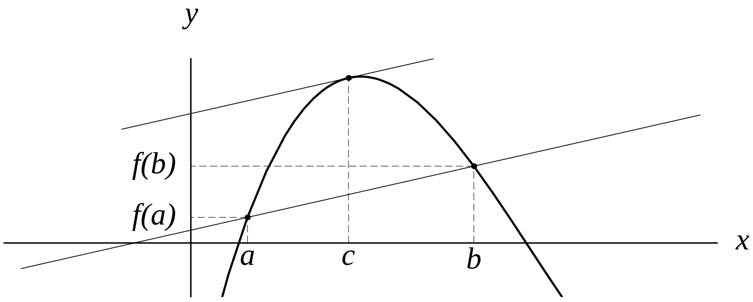
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poleg tega je $g(a) = g(b) = f(a)$, torej funkcija g zadošča pogojem Rollovega izreka. Na intervalu $[a, b]$ obstaja tako vsaj ena točka c, v kateri je odvod funkcije g enak 0, to pa pomeni, da enačba (4.25) velja. □

Lagrangeov izrek pove, da na gladki krivulji $y = f(x)$ med točkama A in B obstaja vsaj ena točka D, v kateri je tangenta na krivuljo vzporedna sekanti skozi točki A in B (slika 4.10).

Lagrangeov izrek je osrednja lastnost odvedljivih funkcij. Oglejmo si nekaj njegovih ključnih posledic.

[3] Joseph Louis Lagrange (1736–1813), francoski matematik in astronom, začetnik teorije analitičnih funkcij.



Slika 4.10: Lagrangeov izrek

Izrek 4.6.4. *Funkcija f, ki je na intervalu $[a, b]$ odvedljiva in je njen odvod povsod enak* 0*, tj.* $f'(x) = 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$*, je konstanta.*

Dokaz. Vzemimo poljuben $x \in (a, b]$. Po Lagrangeovem izreku je $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ za nek $c \in (a, x)$. Ker pa je odvod funkcije f povsod enak 0, je tudi $f'(c) = 0$, torej je $f(x) = f(a)$. Funkcija f je konstanta na intervalu $[a, b]$. $\square$

Izrek 4.6.5. *Funkciji f_1 in f_2, ki imata povsod na intervalu $[a, b]$ enaka odvoda, se razlikujeta kvečjemu za konstanto:*

$$f_2(x) = f_1(x) + C.$$

Dokaz. Razlika $F = f_2 - f_1$ ima odvod $F'(x) = f_2'(x) - f_1'(x) = 0$. Po izreku 4.6.4 je $F(x) = f_2(x) - f_1(x) = C$. $\square$

Če sta funkciji f in g odvedljivi na intervalu $[a, b]$, nam Lagrangeov izrek za vsako posebej zagotavlja obstoj točke, v kateri je odvod ravno povprečna sprememba funkcijske vrednosti na intervalu. Obstaja tudi točka, kjer je odvod enak povprečni vrednosti spremembe za obe funkciji hkrati:

Izrek 4.6.6. *[Cauchy] Funkciji f in g naj bosta zvezni na intervalu $[a, b]$, v vsaki notranji točki tega intervala odvedljivi in naj bo $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Potem obstaja število $c \in (a, b)$, da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.26}$$

Dokaz. Funkcija g zadošča pogojem Lagrangeovega izreka, zato je v neki točki $c_1 \in (a,b)$

$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(c_1) \neq 0,$$

torej je $g(b) \neq g(a)$. Sestavimo funkcijo

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

in konstanto λ določimo tako, da bo $F(a) = F(b)$:

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Po Rollovem izreku obstaja taka točka $c \in (a,b)$, da je

$$F'(c) = f'(c) - \lambda g'(c) = 0,$$

torej je

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

L'Hôpitalovo pravilo

L'Hôpitalovo pravilo (ki ga je v resnici odkril Johann Bernoulli[4]) je preprosta posledica Cauchyjevega izreka in je zelo uporabno sredstvo za računanje nedoločnih izrazov oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$.

Izrek 4.6.7. l'Hôpital[5] *Naj bosta funkciji f in g definirani in odvedljivi na intervalu (a,b) in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Če v točki $x_0 \in (a,b)$ velja $f(x_0) = g(x_0) = 0$, je*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pri pogoju, da limita na desni obstaja.

---

[4]Johann Bernoulli (1667–1748), švicarski matematik, ukvarjal se je z diferencialnimi enačbami in z variacijskim računom

[5]Guillaume François Antoine l'Hôpital (1661–1704), francoski matematik, eden od začetnikov infinitezimalnega računa

Dokaz. Naj bo $x > x_0$. Po Cauchyjevem izreku velja:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

kjer je c med x in x_0. Ko gre $x \to x_0$, gre tudi $c \to x_0$, zato je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

V drugi limiti imamo sicer drugo spremenljivko (c) kot v prvi (x), vendar na vrednost limite to ne vpliva, saj vrednost limite ni odvisna od simbola, ki ga uporabimo za oznako spremenljivke (taki spremenljivki pravimo tudi gluha (vezana) spremenljivka). ■

L'Hôpitalovo pravilo ima več variacij. Seveda velja v isti obliki, kot je zapisano za limito, tudi za levo in za desno limito. Napišimo kar brez dokaza še dve verziji:

Izrek 4.6.8. *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na intervalu (a, b), razen v točki $x_0 \in (a, b)$ in $g'(x) \neq 0$ na intervalu (a, b). Če je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \textit{in} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pri pogoju, da druga limita obstaja.

Izrek 4.6.9. *Če sta f in g odvedljivi na nekem intervalu (a, ∞), razen v točki $x_0 \in (a, b)$, če je $g'(x) \neq 0$ na tem intervalu in če je*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

ali

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \textit{in} \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty,$$

potem je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pri pogoju, da druga limita obstaja.

Primer 4.6.3. Izračunajmo limiti:

1.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x}-1}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-1/x)^{-1/2}/2x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{2\sqrt{1-1/x}} = -\frac{1}{2}.$$

2.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to x_0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

■

4.6.3 Monotonost in zadostni pogoji za ekstrem

V razdelku 3.1 smo že definirali monotonost (naraščanje in padanje) funkcij. Za odvedljive funkcije je ugotovaljanje naraščanja ali padanja preprosto, saj velja:

Izrek 4.6.10. *Odvedljiva funkcija je na intervalu $[a,b]$ naraščajoča natanko takrat, kadar je $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$, in padajoča natanko takrat, kadar je $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a,b)$.*

Dokaz. Naj bo $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$ in vzemimo poljubni točki $x_1, x_2 \in (a,b)$, kjer je $x_1 < x_2$. Iz Lagrangeovega izreka sledi, da v neki točki $x \in (x_1, x_2)$ velja:

$$f'(x) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Ker je $f'(x) \geq 0$, je $f(y) \leq f(z)$, kar pomeni, da je funkcija naraščajoča. Če je $f'(x) \leq 0$ na intervalu (a,b), na podoben način dokažemo, da je funkcija padajoča.

Po drugi strani, naj bo funkcija f naraščajoča na intervalu $[a, b]$ in $x \in (a, b)$ poljubna točka. Potem je za vsak $h > 0$, za katerega je $x + h < b$,

$$f(x+h) - f(x) > 0$$

in za vsak $h < 0$, za katerega je $x + h > a$, tudi

$$f(x+h) - f(x) < 0.$$

Diferenčni kvocient je v vsakem primeru kvocient dveh enako predznačenih količin, zato je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0,$$

torej mora biti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Podobno dokažemo, da je odvod padajoče funkcije vedno manjši ali enak 0.

$\square$

Primer 4.6.4. Ugotavljanje monotonosti funkcij s pomočjo odvoda:

1. Določimo intervale, na katerih funkcijska vrednost narašča ali pada, za funkcijo $f(x) = x^2 + 2/x$. Odvajamo:

   $$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}.$$

   Odvod je negativen za vsak $x < 1$, $x \neq 0$ in pozitiven za vsak $x > 1$, točka $x = 1$ je kritična točka. Interval naraščanja je $[1, \infty)$, intervala padanja pa sta $(-\infty, 0)$ in $(0, 1]$.

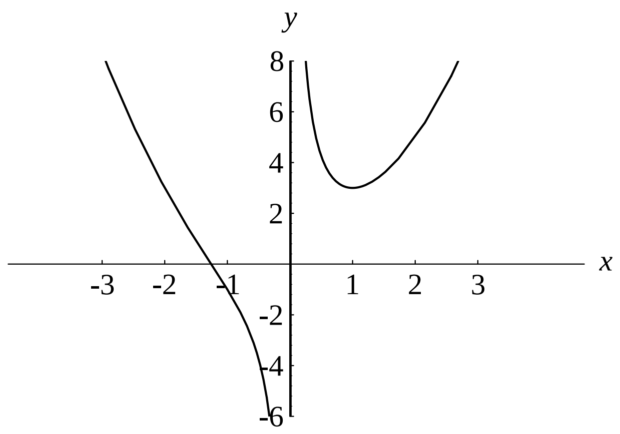
2. Pokažimo, da je funkcija

   $$f(x) = (1+x)^{1/n} - x^{1/n},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

   monotono padajoča na celem intervalu $[0, \infty)$.

   Odvod je

   $$f'(x) = \frac{1}{n}\left((1+x)^{(1-n)/n} - x^{(1-n)/n}\right).$$



Slika 4.11: Graf funkcije $x^2 + 2/x$

Ker je $x < 1 + x$ in eksponent $(1 - n)/n$ negativen, je

$$x^{(1-n)/n} > (1 + x)^{(1-n)/n},$$

torej je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in [0, \infty)$.

Od tod lahko izpeljemo zanimivi dejstvi. Najprej, $f(x) < f(0)$ za vsak $x \in [0, \infty)$, torej za vsako pozitivno število in za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ velja

$$(1 + x)^{1/n} - x^{1/n} > 1.$$

Poleg tega vemo, da je funkcija $f(x)$ injektivna (saj je vsaka strogo monotona funkcija injektivna), torej je obrnljiva na intervalu $[0, \infty)$, zato ima enačba

$$f(x) = (1 + x)^{1/n} - x^{1/n} = y$$

natanko eno rešitev za vsak y iz zaloge vrednosti $Z_f = (0, 1]$. ■

Iz izreka 4.6.10 sledi preprosta metoda, s katero ugotavljamo, ali funkcija f v kritični točki c zavzame lokalni ekstrem. Če leži točka c na intervalu (a, b), kjer je $f'(x) > 0$, očitno v njej ne more biti lokalnega ekstrema, ker po izreku 4.6.10 funkcija na tem intervalu narašča. Podobno velja, če je $f'(x) < 0$ na nekem intervalu (a, b) okrog točke c. Tako:

Izrek 4.6.11. Prvi zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema. *Funkcija $f(x)$ zavzame v kritični točki c lokalni ekstrem natanko takrat, kadar odvod ob prehodu skozi točko c spremeni znak. Če je $f'(x) < 0$ za $x < c$ in*

$f'(x) > 0$ *za* $x > c$, *je v točki* c *lokalni minimum, v obratnem primeru pa je v točki* c *lokalni maksimum.*

Primer 4.6.5. Funkcija
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$
ima odvod
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$
kritični točki sta $x_{1,2} = \pm 1$. Odvod $f'(x)$ je:

negativen za $x < -1$,
pozitiven za $-1 < x < 1$,
negativen za $x > 1$,

zato je v točki $x = -1$ minimum, v točki $x = 1$ pa maksimum. ■

Če je funkcija f v kritični točki c dvakrat odvedljiva, si lahko pomagamo tudi z drugim odvodom: če je $f''(c) > 0$, prvi odvod $f'(x)$ ob prehodu skozi točko c narašča; ker je $f'(c) = 0$, mora biti $f'(x)$ negativen za $x < c$ in pozitiven za $x > c$. Odtod sledi, da je v točki c lokalni minimum. Podobno se prepričamo, da je v točki c lokalni maksimum, če je $f''(c) < 0$. Velja torej:

Izrek 4.6.12. Drugi zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema. *Če je funkcija* f *v kritični točki* c *dvakrat odvedljiva in je* $f''(c) > 0$, *zavzame* f *v* c *lokalni minimum, če je* $f''(c) < 0$, *pa lokalni maksimum.*

Primer 4.6.6. Funkcija
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$
z odvodom
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0,$$
ima kritični točki $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$. Drugi odvod
$$f''(x) = 6x - 12$$
je v točki x_1 negativen, tu je lokalni maksimum, v točki x_2 pa pozitiven, tu je lokalni minimum. ■

4.7 Taylorjeva formula

Funkcija f, ki je odvedljiva v neki točki a, ima v tej točki diferencial $df = f'(a)dx$. Če je x dovolj blizu a, je vrednost

$$f(a) + df = f(a) + f'(a)(x-a)$$

dober približek za funkcijsko vrednost $f(x)$. Funkcijsko vrednost lahko zapi-š-mo kot vsoto

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1,$$

kjer gre napaka R_1 proti 0, ko $x \to a$, prva dva člena pa predstavljata vrednost linearne funkcije $f(a) + f'(a)(x-a)$ pri x.

Taylorjeva formula omogoča, da za funkcije, ki so odvedljive več kot enkrat, približek iz diferenciala izboljšamo tako, da funkcijsko vrednost $f(x)$ aproksimiramo z vrednostjo *Taylorjevega polinoma.* Poleg tega omogoča, da ocenimo napako R, ki jo pri tem naredimo.

Izrek 4.7.1. Taylorjeva formula[6] *Funkcija f naj bo $(n+1)$-krat odvedljiva na intervalu (b,c) in naj bo $a \in (b,c)$. Potem za vsak $x \in (b,c)$ velja*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n.$$

Napaka R_n je enaka

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kjer je ξ neka točka med a in x.

Dokaz. Vzemimo poljuben $x \in (b,c)$. Za vsak y med a in x naj bo

$$F(y) = f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) - \cdots - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Dokazati moramo, da je

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

kjer je ξ točka med a in x.

[6]Brook Taylor (1685–1731), angleški matematik.

Če funkcijo $F(y)$ odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned} F'(y) &= -f'(y) + (f'(y) - f''(y))(x-y) + \cdots - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\,(x-y)^n. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Po drugi strani ima funkcija

$$G(y) = F(y) - \frac{(x-y)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} F(a)$$

v točkah a in x vrednost 0: $G(a) = G(x) = 0$, in po Rollovem izreku je v neki točki med a in x

$$G'(\xi) = F'(\xi) + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}} F(a) = 0,$$

zato je

$$F(a) = -F'(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}.$$

Če v tej enačbi upoštevamo (4.27), dobimo

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

in izrek je dokazan. □

Polinom

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

imenujemo *Taylorjev polinom* funkcije f stopnje n okrog točke a. Napake R_n seveda ne moremo natančno izračunati, ker ne poznamo točke ξ — vemo samo, da je to neka točka med a in x. Pogosto pa poznamo kakšno oceno za $(n+1)$-vi odvod funkcije na intervalu (b, c):

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \text{ za vsak } x \in (b, c),$$

ki da oceno za napako

$$|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Primer 4.7.1. Polinom $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, je $(n+1)$-krat odvedljiv na celi $\mathbb{R}$, njegov k-ti odvod, $k \leq n$, je enak

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}.$$

Koeficienti Taylorjevega polinoma stopnje n so

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}, \; k \leq n.$$

Ker je $f^{(n+1)}(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je napaka $R_n = 0$. Taylorjeva formula v tem primeru ni nič drugega kot binomski izrek:

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

■

Če je funkcija f ∞-krat odvedljiva na intervalu (b, c), lahko desno stran Taylorjeve formule zapišemo v obliki vrste

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

ki ji pravimo *Taylorjeva vrsta* funkcije f okrog točke a. Delne vsote te vrste so ravno Taylorjevi polinomi. Če za nek $x \in (b, c)$ velja

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0,$$

konvergira Taylorjeva vrsta proti vrednosti $f(x)$, zato lahko zapišemo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Primer 4.7.2. Taylorjeve vrste elementarnih funkcij:

1. Naj bo $f(x) = (1+x)^m$, kjer je eksponent m neko racionalno število. Če je $m < 0$, funkcija f pri $x = -1$ ni definirana, na intervalu $(-1, 1)$ pa je

definirana za vsak m in je ∞-krat odvedljiva, torej jo lahko razvijemo po Taylorjevi formuli okrog točke 0. Ostanek

$$R_n = \binom{m}{n+1}(1+\xi)^{m-n+1}x^{n+1}$$

gre z naraščajočim n proti 0 za vsak $x \in (-1,1)$, saj gre

$$|(1+\xi)^{m-n+1}x^{n+1}| = |1+\xi|^{m+2}\left|\frac{x}{1+\xi}\right|^{n+1}$$

z naraščajočim n proti 0, ker je

$$\left|\frac{x}{1+\xi}\right| < 1.$$

Za vsak $|x| < 1$ tako velja:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k. \tag{4.28}$$

Vrsti (4.28) pravimo *binomska vrsta*. Če je eksponent $m \in \mathbb{N}$, je binomska vrsta končna, saj je

$$\binom{m}{k} = 0, \quad \text{za} \quad k > m$$

in binomska vrsta se reducira na končno vsoto iz primera (4.7.1).

Poglejmo še posebej primer $m = -1$. V tem primeru je

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k,$$

torej za $|x| < 1$,

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k,$$

kar je dobro znana formula za vsoto geometrijske vrste s kvocientom $q = -x$.

2. Eksponentna funkcija je ∞-krat odvedljiva na celi množici $\mathbb{R}$, vsi njeni odvodi so enaki funkciji:

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad \text{za vsak} \quad n \in \mathbb{N},$$

Taylorjeva formula za razvoj okrog točke 0 je:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!} x^k + R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n.$$

Pokažimo, da gre pri vsakem $x \in \mathbb{R}$ ostanek $R_n \to 0$, ko gre $n \to \infty$. Vzemimo poljuben $x \in \mathbb{R}$ in ocenimo ostanek:

$$|R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^n \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^n,$$

torej je za vsak n

$$0 \leq |R_n| \leq a_n = \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^n.$$

Za zaporedje a_n velja rekurzivna formula

$$a_{n+1} = a_n \frac{|x|}{n+2}.$$

Od tod sledi, da je za $n \geq \lfloor |x| \rfloor$ to padajoče zaporedje pozitivnih števil, torej konvergentno, z limito, ki je rešitev enačbe

$$a = a \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} = 0, \quad \text{torej} \quad a = 0.$$

Od tod pa sledi, da je tudi $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$.

Za vsak $x \in \mathbb{R}$ torej velja:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

3. Funkcija $\log x$ je ∞-krat odvedljiva, njeni odvodi so

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \ldots \quad f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}.$$

Tako je Taylorjeva formula okrog točke 1 za funkcijo log enaka

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} x^k + R_n \tag{4.29}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n \tag{4.30}$$

Ostanek R_n konvergira proti 0 za vsak $|x| < 1$ (dokaz za to najdemo na primer v [8]).

4. Zapišimo Taylorjevo formulo za funkcijo $f(x) = \sin x$ okrog točke $a = 0$. Odvodi so

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0; & n = 2k \\ (-1)^k; & n = 2k-1 \end{cases},$$

torej je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + R_n.$$

Ostanek vrste lahko ocenimo:

$$|R_n| = \left| \frac{\sin(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} |x^{n+1}|,$$

to pa pri vsakem $x \in \mathbb{R}$ konvergira proti 0, ko gre $n \to \infty$. Zato je

$$\sin x = \sum_{k=1} \infty \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Na podoben način pridemo do Taylorjeve vrste za $\cos x$:

$$\cos x = \sum_{k=0} \infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

■

Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta sta zelo uporabno orodje za raziskovanje funkcije v bližini točke, okrog katere razvijamo. Oglejmo si njeno uporabnost pri računanju limit in pri iskanju ekstremov funkcij.

Nedoločeni izrazi Pogosto lahko nedoločene izraze oblike

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

kjer je

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

hitreje in uspešneje kot z l'Hôpitalovim pravilom izračunamo tako, da zapišemo nekaj členov v razvoju funkcij f in g v Taylorjevo vrsto okrog točke a.

Primer 4.7.3. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{2x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x/2+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2+\cdots)-1-x/2}{2x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(-1/8+\cdots)}{2x^2}=-\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

■

Že v izreku 4.6.12 smo ugotovili, da je v kritični točki c, kjer je funkcija f dvakrat odvedljiva, obstoj ekstrema zagotovljen, kadar je $f''(c)\neq 0$. Kadar je $f''(c)=0$, o obstoju ekstrema ne moremo sklepati. S pomočjo Taylorjeve formule lahko dokažemo:

Izrek 4.7.2. Tretji zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema. *Funkcija f, ki je $(n+1)$-krat odvedljiva, ima v kritični točki c lokalni ekstrem, če je*

$$f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(n-1)}(c)=0 \quad \textit{in} \quad f^{(n)}(c)\neq 0,$$

kjer je n sodo število, in sicer lokalni maksimum, če je $f^{(n)}(c)<0$ in lokalni minimum, če je $f^{(n)}(c)>0$. Če je n liho število, ekstrema v točki c ni.

Dokaz. Zaradi Taylorjeve formule je

$$\begin{aligned}
f(c+h)&=f(c)+f'(c)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n\\
&=f(c)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n,
\end{aligned}$$

kjer je ξ točka med c in $c+h$. Recimo, da je $n=2k$ sodo število in $f^{(n)}(c)>0$. Za dovolj majhen h je točka ξ dovolj blizu točke c in tudi $f^{(n)}(\xi)>0$, obenem pa je $h^n=(h^2)^k\geq 0$ za vsak h in zato velja

$$f(c+h)-f(c)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n\geq 0$$

za vsak h. V točki c je torej lokalni minimum. Podobno dokažemo, da je v točki c lokalni maksimum, če je $n=2k$ in $f^{(n)}(c)<0$.

Kadar pa je n liho število, je predznak potence h^n odvisen od predznaka h, zato je tudi predznak razlike $f(c+h)-f(c)$ odvisen od predznaka h. To že pomeni, da v točki c ni ekstrema. □

Primer 4.7.4. Funkcija $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x$ ima odvod

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

enak 0 pri $x = 0$, torej je $x = 0$ kritična točka. Izračunajmo odvode višjega reda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \ -4x(1+x^2)^{-2}, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= \ -4(1+x^2)^{-2} + 16x(1+x^2)^{-3}, & f'''(0) &= -4 \neq 0. \end{aligned}$$

Funkcija f v točki $x = 0$ nima ekstrema. ■

4.8 Konveksnost, konkavnost in prevoji

Definicija 4.8.1. Funkcija f, definirana na intervalu $[a, b]$, je na tem intervalu *konveksna*, če je za vsak $0 < \alpha < 1$ in za vsak par točk $x, y \in [a, b]$,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Povejmo drugače: za poljubni točki $x, y \in [a, b]$ je daljica, ki povezuje točki $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$, povsod nad grafom funkcije f.

Če je

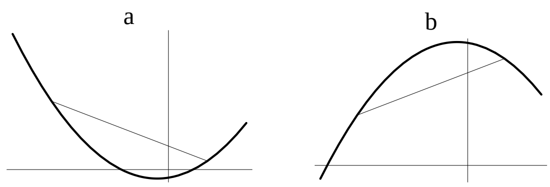
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y),$$

(če daljica, ki povezuje točki $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$, leži povsod pod grafom funkcije), je funkcija *konkavna.*

Primer 4.8.1. Funkcija $f(x) = |x|$ je konveksna na celem definicijskem območju $\mathbb{R}$, kajti zaradi trikotniške neenakosti je

$$f|\alpha x + (1-\alpha)x| \leq \alpha|x| + (1-\alpha)|y|.$$

■



Slika 4.12: Konveksna (a) in konkavna (b) funkcija

Iz grafa zlahka razberemo, če je funkcija konveksna ali konkavna: vsaka daljica, ki povezuje dve točki na grafu konveksne funkcije, je nad tistim delom grafa, ki leži med obema točkama. Pri konkavni funkciji je daljica, ki povezuje dve točki na grafu vedno pod grafom.

Če je funkcija f vsaj enkrat odvedljiva, je konveksna tam, kjer njen prvi odvod narašča, konkavna pa tam, kjer njen prvi odvod pada. Od tod sledi, da za dvakrat odvedljive funkcije velja:

Izrek 4.8.1. *Dvakrat odvedljiva funkcija je na intervalu I konveksna, če je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in I$, in konkavna, če je $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in I$.*

Funkcija se lahko spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno le v točkah, kjer je $f''(x) = 0$, to je v kritičnih točkah funkcije $f'(x)$. Funkcija f se v točki c spremeni iz konveksne v konkavno natanko takrat, kadar ima prvi odvod $f'(x)$ v tej točki lokalni maksimum. Iz konkavne v konveksno se spremeni, če ima prvi odvod $f'(x)$ v točki c lokalni minimum.

Točko, v katerih se funkcija spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno, imenujemo *prevoj* ali *prevojna točka* funkcije f. Če je funkcija f dvakrat odvedljiva in c njen prevoj, je $f''(c) = 0$ in se predznak drugega odvoda $f''(x)$ ob prehodu skozi točko c spremeni. Povejmo še, kako prevojno točko prepoznamo na grafu: če je c prevoj funkcije f, potem graf funkcije v točki c seka tangento na graf v tej točki.

Odvodi (prvega in višjih redov) so lahko v veliko pomoč pri risanju grafov.

Primer 4.8.2. Pokažimo na primerih, kako si lahko pri risanju grafov funkcij pomagamo z odvodi:

1. Narišimo graf funkcije
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

   Funkcija je definirana in zvezna na celi množici $\mathbb{R}$. Poleg tega je liha, tako da je graf simetričen glede na točko $(0,0)$. Ker je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

ima graf vodoravno asimptoto — premico $y = 0$.

Iz odvoda

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

dobimo, da sta kritični točki $x = \pm 1$. Če je $x < -1$, je $f'(x) < 0$, funkcija na tem intervalu pada. Za $-1 < x < 1$ je $f'(x) > 0$, funkcija narašča, za $x > 1$ je $f'(x) < 0$, funkcija spet pada. V točki $x = -1$ je zato lokalni minimum $f(-1) = -1/2$, v točki $x = 1$ pa lokalni maksimum $f(1) = 1/2$.

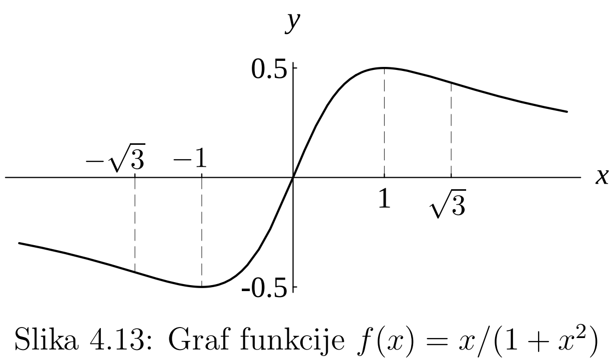
Poiščimo še prevojne točke:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0,$$

rešitve so $x_{1,2} = \pm\sqrt{3},\ x_3 = 0$. Zato:

za	$x < -\sqrt{3}$	je	$f''(x) > 0$,	funkcija je konkavna,
za	$-\sqrt{3} < x < 0$	je	$f''(x) < 0$,	funkcija je konveksna,
za	$0 < x < \sqrt{3}$	je	$f''(x) > 0$,	funkcija je konkavna,
za	$x > \sqrt{3}$	je	$f''(x) < 0$,	funkcija je konveksna.

Točke $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}, y_{1,2} = \pm\sqrt{3}/4$ in $x_3 = 0, y_3 = 0$ so vse prevoji (slika 4.13).



Slika 4.13: Graf funkcije $f(x) = x/(1+x^2)$

2. Narišimo graf $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$, kjer je $a > 0$.

   Funkcija je povsod definirana in zvezna. Izračunajmo odvod:

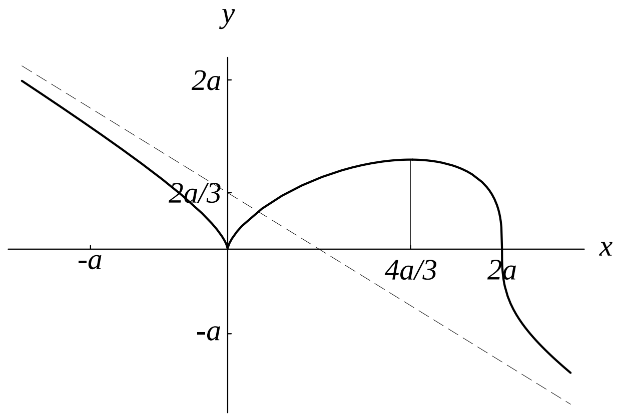
$$f'(x) = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}.$$

   Odvod obstaja povsod, razen v točkah $x_1 = 0$ in $x_1 = 2a$, edina kritična točka je $x_3 = 4a/3$. Pri $x_1 = 0$ in $x_2 = 2a$ je

$$\lim_{x \to x_{1,2}} f'(x) = \pm\infty,$$

   tangenta je v teh dveh točkah navpična. Funkcija je

padajoča za	$x < 0$,	ker je	$f'(x) < 0$,
naraščajoča za	$0 < x < 4a/3$,	ker je	$f'(x) > 0$,
padajoča za	$4a/3 < x < 2a$,	ker je	$f'(x) < 0$,
padajoča za	$x > 2a$,	ker je	$f'(x) < 0$.



Slika 4.14: Graf funkcije $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$.

   Vidimo: v točki $x = 0$ je lokalni minimum $f(x) = 0$ (vendar funkcija tu ni odvedljiva — tangenta je v tej točki navpična). V točki $x = 4a/3$ je lokalni maksimum $f(x) = (2/3)a\sqrt[3]{4}$.

   Poleg tega je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = -1,$$

   to pove, da se graf funkcije f z naraščajočim x približuje premici s smernim koeficientom $k = -1$. Graf ima *poševno asimptoto* oblike

$y = -x + n$. Koeficient n v enačbi asimptote dobimo kot

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2 - x(2ax^2 - x^3) + x^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Enačba poševne asimptote je $y = -x + 2a/3$.

Izračunajmo še drugi odvod:

$$f''(x) = \frac{8a^2}{9\sqrt[3]{x^4(2a - x)^5}}.$$

Drugi odvod nima ničel in ne obstaja v točkah $x = 0$ in $x = 2a$, kjer f ni odvedljiva. Na intervalih $x < 0$ in $0 < x < 2a$ je negativen, tu je graf konveksen, na intervalu $x > 2a$ je $f''(x) > 0$ in graf je tu konkaven.

3. Oglejmo si še en primer uporabe odvoda. Dane so tri točke v ravnini A, B in C. Iščemo točko X, za katero velja, da je vsota njenih oddaljenosti od točk A, B in C, torej vsota

$$d(X, A) + d(X, B) + d(X, C),$$

čim manjša. Problem malo poenostavimo s predpostavko, da sta točki A in B enako oddaljeni od točke C. Koordinatni sistem v ravnini lahko potem postavimo tako, da je C v izhodišču, A in B pa imata koordinate (a, b) in $(a, -b)$.

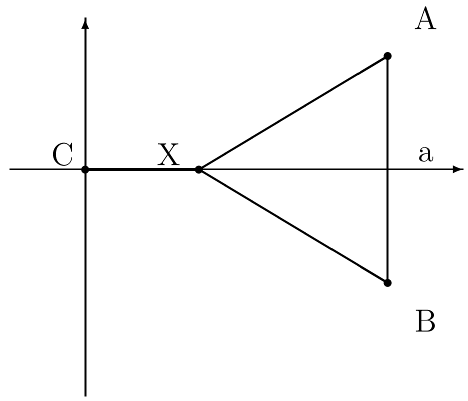
Iz geometrijske slike je razvidno, da točka X leži nekje na intervalu $[0, a]$ na osi x. Vsota razdalj točke X od točk A, B in C je enaka

$$f(x) = x + 2\sqrt{b^2 + (a - x)^2}. \tag{4.31}$$

Poiskati moramo minimum zvezne funkcije (4.31) na intervalu $[0, a]$.

Zvezna in odvedljiva funkcija na zaprtem intervalu zavzame svoje ekstreme v kritičnih točkah, ali pa v krajiščih intervala. Poiščimo najprej kritične točke:

$$f'(x) = 1 + \frac{-2(a - x)}{\sqrt{b^2 + (a - x)^2}} = 0$$



Slika 4.15: Točka X z najmanjšo vsoto razdalj od točk A, B in C.

Odtod

$$\begin{aligned} 2(a-x) &= \sqrt{b^2+(a-x)^2} \\ 4(a-x)^2 &= b^2+(a-x)^2 \\ x &= a \pm b/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Točka $a+b/\sqrt{3}$ v nobenem primeru ni na intervalu $[0,a]$. Točka $a-b/\sqrt{3}$ pa je na intervalu, če je $a \geq b/\sqrt{3}$, če je $a < b/\sqrt{3}$ pa pade ven iz intervala. Obravnavati moramo dva ločena primera: $a \geq b/\sqrt{3}$ in $a < b/\sqrt{3}$.

Če je $a < b/\sqrt{3}$, funkcija $f(x)$ na intervalu $[0,a]$ nima kritičnih točk, torej zavzame svojo največjo in najmanjšo vrednost v robnih točkah: $f(0) = 2\sqrt{a^2+b^2}$ in $f(a) = a+2b$. Za vsak $a < 4b/3$ je $2\sqrt{a^2+b^2} < a+2b$. Ker je v našem primeru $a < b/\sqrt{3} < 4b/3$, mora v tem primeru točka X biti v izhodišču $(0,0)$.

Če je $a \geq b/\sqrt{3}$, je na intervalu $[0,a]$ kritična točka $x_0 = a - b/\sqrt{3}$. V tej točki funkcija f zavzame lokalni minimum, saj je $f'(x) < 0$ levo in $f'(x) > 0$ desno od te točke. V tem primeru ima točka X koordinati $(a-b/\sqrt{3}, 0)$, poltraki, ki točko X povezujejo s točkami A, B in C med seboj pa oklepajo enake kote $2\pi/3$. ■

Poglavje 5

Integral

5.1 Nedoločeni in določeni integral

Nedoločeni integral

V poglavju o odvajanju funkcij smo se naučili dani funkciji f poiskati njen odvod f' oziroma diferencial $df = f'(x)\,dx$. Ugotovili smo, da je vsaka odvedljiva funkcija zvezna, zvezna funkcija pa ni nujno odvedljiva. Tu zastavimo obratno nalogo — k dani funkciji f iščemo tisto funkcijo F, katere odvod je f:

$$F'(x) = f(x).$$

Definicija 5.1.1. Funkcijo F, katere odvod je enak f, imenujemo *nedoločeni integral* funkcije f in pišemo

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Kadar nedoločeni integral funkcije f obstaja, to ni ena sama funkcija — če je F integral funkcije f in C poljubna konstanta, je tudi $F + C$ integral iste funkcije, saj imata funkciji F in $F+C$ isti odvod f. Iz izreka 4.6.5 sledi:

Izrek 5.1.1. *Če je F kak nedoločeni integral funkcije f, dobimo vsak drug njen integral tako, da funkciji F prištejemo konstanto.*

Primer 5.1.1. V primeru 4.1.1 smo ugotovili, da je $(\sin x)' = \cos x$, torej je

$$\int \cos x\,dx = \sin x.$$

■

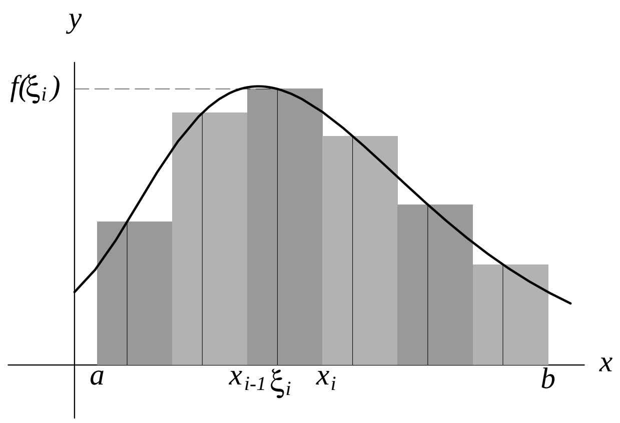
Na podoben način iz vsake formule v tabeli 4.1 dobimo pravilo za integral. Tako poznamo integrale vseh funkcij, ki nastopajo v desnem stolpcu te tabele.

Ob tem se zastavi zprašanje, kakšna mora biti funkcija f, da bo imela svoj nedoločni integral. Preden bomo lahko odgovorili na to vprašanje moramo vpeljati pojem *določenega integrala* funkcije na nekem intervalu (ki na prvi pogled z nedoločenim integralom nima nič skupnega). Izkazalo se bo, da sta oba na videz povsem različna pojma tesno povezana.

Določeni integral

Do pojma določenega integrala najnaravneje pripelje problem računanja ploščin krivočrtnih likov. Naj bo funkcija f na intervalu $[a, b]$ zvezna in povsod pozitivna: $f(x) > 0$. Radi bi izračunali ploščino S lika, ki ga omejujejo ta krivulja, krajni ordinati $x = a$ in $x = b$ ter odsek abscisne osi.

Problema se lotimo tako, da namesto ploščine krivočrtnega lika izračunamo ploščino stopničastega lika, ki se danemu krivočrtnemu liku čim bolje prilega.



Slika 5.1: Integralske vsote so približek za ploščino lika pod krivuljo

V ta namen izberemo *delitev* intervala $[a, b]$, to je množico $n + 1$ točk

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

za katere velja:

$$x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq b = x_n.$$

Te točke razdelijo interval na n podintervalov $[x_{k-1}, x_k]$ z dolžinami $\delta_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Na vsakem podintervalu izberemo točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$. Produkt $f(\xi_k)\delta_k$ je enak ploščini pravokotnika, ki ima δ_k za osnovnico in višino $f(\xi_k)$. Vsoti vseh teh ploščin

$$\sigma_D = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k = f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + \cdots + f(\xi_n)\delta_n, \tag{5.1}$$

pravimo *integralska vsota* funkcije f in je približek za iskano ploščino, ki je tem boljši, čim manjše so dolžine podintervalov δ_k.

Omejitev $f(x) > 0$ pravzaprav ni potrebna. Integralske vsote lahko definiramo tudi za funkcije, ki so kje na intervalu negativne. Zveza s ploščino je podobna, če ploščine likov pod osjo x obravnavamo kot negativne količine.

Naj bo funkcija f na intervalu $[a, b]$ omejena in naj bo

$$m = \inf_{a \le x \le b} f(x) \quad \text{in} \quad M = \sup_{a \le x \le b} f(x).$$

Če je $D = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ delitev intervala, je tudi na vsakem podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ funkcija f omejena, za vsak k obstajajo

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) \quad \text{in} \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x).$$

Vsotam

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} m_k \delta_k \quad \text{in} \quad S_D = \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k$$

pravimo *spodnje* in *zgornje integralske vsote*. Za vsako delitev D in za vsako integralsko vsoto σ_D velja:

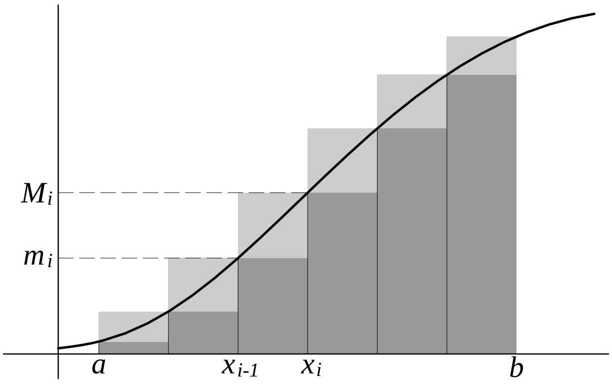
$$m(b - a) \le s_D \le \sigma_D \le S_D \le M(b - a). \tag{5.2}$$

Za spodnje in zgornje integralske vsote velja:

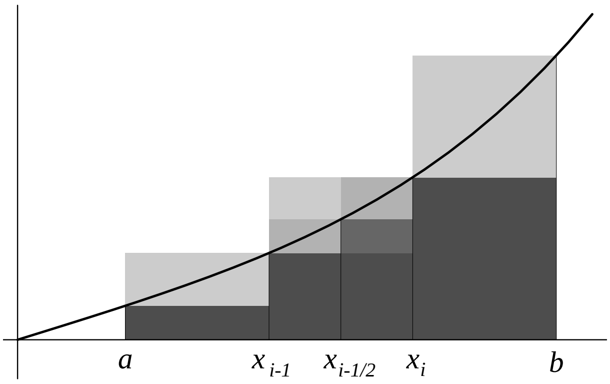
1. Če delitvi intervala D dodamo dodatne delilne točke, dobimo novo delitev $D' \supset D$ ter je

   $$s_{D'} \ge s_D \quad \text{in} \quad S_{D'} \le S_D. \tag{5.3}$$

   Ta lastnost spodnjih in zgornjih vsot se lepo vidi na sliki 5.3, natančen dokaz bi zahteval precej besed in ga izpustimo.



Slika 5.2: Spodnja in zgornja integralska vsota.



Slika 5.3: Spodnje in zgornje vsote.

2. Če sta D in D' poljubni delitvi, je $s_D \leq S_{D'}$. Drugače povedano: vsaka spodnja vsota je manjša od katerekoli zgornje vsote.

   To lastnost dokažemo tako, da obe delitvi sestavimo v novo delitev $D'' = D \cup D'$, ki vsebuje vse delilne točke delitev D in D'. Zaradi (5.3) je $s_D \leq s_{D''}$ in $S_{D'} \geq S_{D''}$, torej velja:

$$s_D \leq s_{D''} \leq S_{D''} \leq S_{D'}.$$

Vse spodnje vsote so omejene navzgor, saj je $s_D \leq M(b-a)$ za vsako delitev D. Vse zgornje vsote pa so omejene navzdol, saj za vsako delitev D velja $S_D \geq m(b-a)$. Zato obstaja

$$I_1 = \sup s_D \quad \text{in} \quad I_2 = \inf S_D.$$

Definicija 5.1.2. Funkcija f je *integrabilna* na intervalu $[a,b]$, če je $I_1 = I_2$. Število $I = I_1 = I_2$ imenujemo *določeni integral* funkcije f na intervalu $[a,b]$ in pišemo:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Drugače povedano,

Izrek 5.1.2. *Funkcija f je integrabilna na intervalu $[a,b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka delitev D intervala, da je*

$$S_D - s_D < \varepsilon.$$

Če je funkcija integrabilna na intervalu $[a,b]$, očitno velja

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{5.4}$$

Pri uporabi določenega integrala se pogosto sklicujemo na posledico ocene (5.2): če je funkcija f integrabilna na intervalu $[a,b]$ in je (D_m) poljubno zaporedje delitev, ki ima to lastnost, da gredo vse dolžine δ_k proti 0, ko $m \to \infty$, ter je (σ_m) pripadajče zaporedje integralskih vsot, potem je

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \int_a^b f(x)\,dx.$$

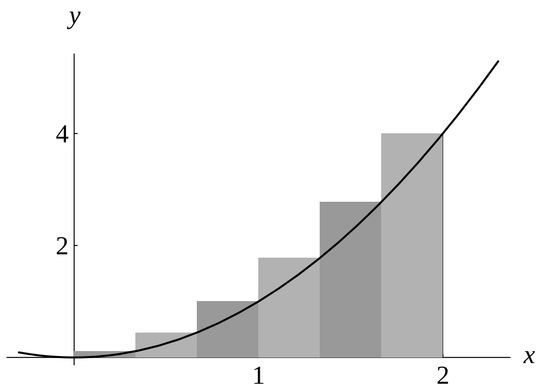
Primer 5.1.2. Izračunajmo ploščino lika, ki ga določa krivulja $y = x^2$ nad intervalom $[0,2]$.

Interval razdelimo na n enakih delov dolžine $\delta = 2/n$, delilne točke so $x_k = 2k/n$. Na vsakem podintervalu izberemo za ξ_k kar desno krajišče intervala, torej točko $x_k = 2k/n$. Integralska vsota, ki jo tako dobimo je enaka

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n x_k^2 \delta = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Uporabimo dobro znano formulo (ki jo lahko dokažemo z matematično indukcijo):

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Slika 5.4: Ploščina lika pod krivuljo $y = x^2$.

in dobimo:

$$\sigma_n = \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Ko $n \to \infty$, je ploščina σ_n čedalje bliže iskani ploščini in v limiti dobimo:

$$S = \lim \sigma_n = \frac{8}{3}.$$

■

Izrek 5.1.2 lahko uporabimo kot kriterij za ugotavljanje integrabilnosti funkcij. Z njegovo pomočjo lahko pokažemo integrabilnost treh razredov funkcij.

Izrek 5.1.3. *Funkcija, ki je zvezna na intervalu $[a, b]$, je na tem intervalu tudi integrabilna.*

Dokaz. Ker je funkcija zvezna na zaprtem intervalu, lahko po izreku 3.2.13 za vsak $\varepsilon > 0$ dobimo tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$, če sta x in y poljubni točki na intervalu, za kateri velja $|x - y| < \delta$.

Vzemimo tako delitev intervala $[a, b]$, da bodo dolžine vseh podintervalov $\delta_k < \delta$ in naj bo m_k natančna spodnja in M_k natančna zgornja meja funkcije f na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$. Potem je $M_k - m_k < \varepsilon$ za vsak k, zato je

$$S - s = \sum_k (M_k - m_k)\delta_k < \sum_k \frac{\varepsilon}{b-a}\delta_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

□

Pravimo, da je funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ *odsekoma zvezna*, če ima končno mnogo točk nezveznosti in v vsaki od njih končno levo in desno limito.

Izrek 5.1.4. *Če je funkcija f na intervalu $[a, b]$ odsekoma zvezna, je integrabilna.*

Dokaza izreka 5.1.4 ne navajamo. Razlog, da izrek velja, je v osnovi tale: če je f odsekoma zvezna funkcija na $[a, b]$ in so $x_1, \ldots, x_k$ točke nezveznosti, lahko f na vsakem intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ posebej dopolnimo do zvezne funkcije, tako da njene vrednosti v krajiščih nadomestimo z levo in desno limito. Vse dobljene funkcije na posameznih intervalih so potem integrabilne, vsota njihovih integralov je enaka integralu funkcije f po celem intervalu.

Izrek 5.1.5. *Vsaka monotona funkcija je integrabilna.*

Dokaz. Naj bo funkcija f naraščajoča in naj bodo x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ delilne točke na intervalu $[a, b]$. Ker je f naraščajoča, je $m_k = f(x_{k-1})$ in $M_k = f(x_k)$. Zgornja integralska vsota je enaka $S = \sum_k f(x_k)\delta_k$, spodnja integralska vsota pa $s = \sum_k f(x_{k-1})\delta_k$. Njuna razlika je

$$S - s = \sum_k [f(x_k) - f(x_{k-1})]\delta_k.$$

Naj bodo delilne točke dovolj goste, da so vse dolžine podintervalov $\delta_k < \delta$. Razliko $S - s$ lahko ocenimo

$$S - s \leq \sum_k [f(x_k) - f(x_{k-1})]\delta = \delta \sum_k [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \delta[f(b) - f(a)].$$

Ta razlika postane pri dovolj gostih delitvah poljubno majhna, zato je vsaka naraščajoča funkcija integrabilna. □

5.2 Lastnosti določenega integrala

Zaenkrat smo definirali določeni integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

v primeru, ko je $[a, b]$ interval, torej ko je $a \leq b$. Definicijo dopolnimo: če je $b \leq a$, je

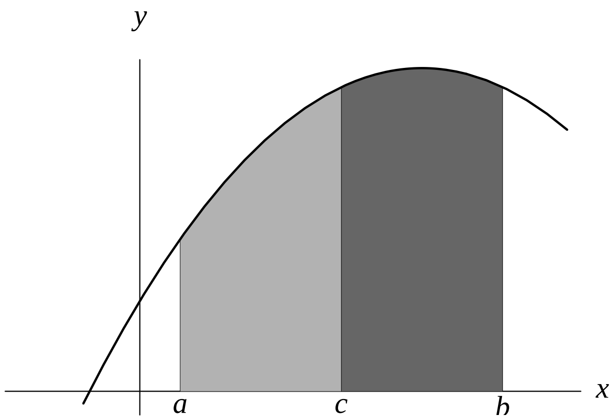
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{5.5}$$

1. Iz definicije določenega integrala vidimo, da smemo integracijsko spremenljivko poljubno imenovati, tako da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. Iz relacije (5.5) sledi, da je določeni integral, v katerem je spodnja meja enaka zgornji, enak 0:

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x) = 0. \tag{5.6}$$



Slika 5.5: Integral na intervalu $[a, b]$ je vsota integralov po podintervalih

3. Naj bo $a \leq c \leq b$. Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna na obeh podintervalih $[a, c]$ in $[c, b]$. Pri tem velja relacija

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.7}$$

Geometrijska vsebina te lastnosti je očitena: če lik pod krivuljo $y = f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ razrežemo pri $x = c$, dobimo dva lika, katerih skupna ploščina je enaka ploščini prvotnega lika (slika 5.5).

Dokaz. Ker je f integrabilna na $[a, b]$, obstaja taka delitev D intervala, da je $S_D - s_D < \varepsilon$, kjer je $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Če delitvi D dodamo delilno točko c, dobimo novo delitev D' in velja $S_{D'} - s_{D'} < \varepsilon$. Vsoti $S_{D'}$ in $s_{D'}$ razpadeta na dva člena:

$$s_{D'} = s' + s'', \quad S_{D'} = S' + S'',$$

kjer se vsoti s' in S' nanašata na interval $[a, c]$, vsoti s'' in S'' pa na interval $[c, b]$. Ker je

$$S_{D'} - s_{D'} = (S' - s') + (S'' - s'') < \varepsilon,$$

kjer sta oba člena pozitivna, mora veljati tudi

$$S' - s' < \varepsilon \quad \text{in} \quad S'' - s'' < \varepsilon,$$

torej je f integrabilna na intervalih $[a, c]$ in $[c, b]$. Za vsoto integralov velja:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \sup s' + \sup s'' = \sup_{c \in D'} s_{D'} \le \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \inf S' + \inf S'' = \inf_{c \in D'} S_{D'} \ge \int_a^b f(x)\,dx,$$

tako mora biti

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

4. *Povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je število

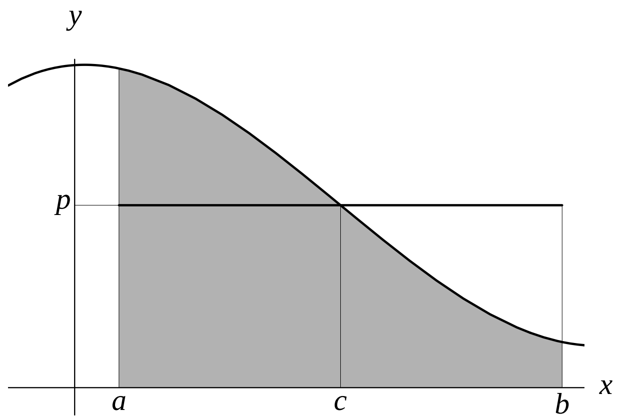
$$P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Iz ocene (5.4) sledi, da je P med natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M funkcije, torej

$$m \le P \le M.$$

Povprečno vrednost funkcije si lahko predstavljamo kot višino tistega pravokotnika nad intervalom $[a, b]$, ki ima enako ploščino kot lik, ki ga nad intervalom $[a, b]$ določa krivulja $y = f(x)$ (slika 5.6).

Če je funkcija f zvezna na $[a, b]$, po izreku 3.2.17 o vmesnih vrednostih, zavzame vse vrednosti med m in M, torej velja:



Slika 5.6: Izrek o povprečni vrednosti

Izrek 5.2.1. Izrek o povprečni vrednosti. *Če je f zvezna na intervalu $[a,b]$, obstaja vsaj ena točka $c \in [a,b]$, kjer je*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = P.$$

5. Če sta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[a,b]$ in če za vsak $x \in [a,b]$ velja $f(x) \leq g(x)$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz. Pri vsaki delitvi D intervala je spodnja vsota $(s_D)_f$ funkcije f manjša od spodnje vsote $(s_D)_g$ funkcije g. Tako je tudi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup(s_D)_f \leq \sup(s_D)_g = \int_a^b g(x)\,dx.$$

6. Če je $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a,b]$, je tudi $|f(x)|$ integrabilna na $[a,b]$ in velja:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dokaz. Če upoštevamo, da za vsak x velja

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

sledi neposredno iz prejšnje lastnosti, da je

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

to pa je res natanko takrat, kadar je

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

5.3 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Računanje določenega integrala s pomočjo integralskih vsot je lahko zamudno in nepraktično. V tem razdelku bomo spoznali še eno uporabno pot do določenega integrala. Hkrati bomo odgovorili na vprašanje o obstoju nedoločenega integrala.

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Za vsak $x \in [a, b]$ je f zvezna na intervalu $[a, x]$, zato obstaja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{5.8}$$

Tako smo dobili novo funkcijo, ki je defnirana na intervalu $[a, b]$.

Izrek 5.3.1. *Funkcija $F(x)$, definirana s predpisom* (5.8) *je zvezna na* $[a, b]$. *Drugače povedano: Določeni integral je zvezna funkcija zgornje meje.*

Dokaz. Če spremenimo vrednost neodvisne spremenljivke x za h, se vrednost odvisne spremenljivke $y = F(x)$ spremeni za

$$\Delta F = F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Po izreku 5.2.1 o povprečni vrednosti obstaja tako število $\xi = x + \theta h$ med x in $x + h$ (t.j. $0 < \theta < 1$), da je

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(x + \theta h). \tag{5.9}$$

Ker je f zvezna funkcija, je na $[a, b]$ tudi omejena, zato je razlika

$$\lim_{h\to 0} \Delta F(x) = \lim_{h\to 0} hf(x + \theta h) = 0.$$

$\square$

Naslednji izrek opisuje zvezo med določenim in nedoločnim integralom neke funkcije in je osrednjega pomena. Po eni strani daje odgovor na vprašanje o obstoju nedoločenega integrala zvezne funkcije f, po drugi strani pa omogoča izpeljavo uporabne formule za računanje določenih integralov.

Izrek 5.3.2. Osnovni izrek integralskega računa *Funkcija $F(x)$, definirana z enačbo* (5.8)*, je odvedljiva na intervalu $[a, b]$, njen odvod je*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Drugače povedano: določeni integral $F(x)$ kot funkcija zgornje meje je nedoločeni integral *funkcije $f(x)$.*

Dokaz. Enačbo (5.9) lahko zapišemo kot

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x + \theta h).$$

Ko $h \to 0$, konvergira $f(x + \theta h) \to f(x)$, zato je

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

$\square$

Od tod neposredno sledi:

Izrek 5.3.3. *Vsaka zvezna funkcija ima nedoločeni integral.*

Naj bo $G(x)$ poljuben nedoločeni integral funkcije $f(x)$. Ker se dva nedoločena integrala funkcije f razlikujeta le za aditivno konstanto, je

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Če v to zvezo vstavimo $x = a$, dobimo vrednost konstante C:

$$G(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C,$$

zato je

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a).$$

Če vstavimo $x = b$, dobimo dobro znano in zelo uporabno Newton[1]-Leibnizovo formulo za računanje določenih integralov:

Izrek 5.3.4. Newton-Leibnizova formula *Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in F njen poljuben nedoločeni integral, je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pri računanju določenih integralov večkrat uporabljamo simboličen zapis

$$[F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

.

Ko uporabljamo Newton-Leibnizovo formulo ne smemo pozabiti na predpostavke, pri katerih velja. Pokažimo na primeru, kakšnim napakam se moramo izogibati pri njeni uporabi.

Primer 5.3.1. Vsak nedoločeni integral F je po definiciji odvedljiva, torej zvezna funkcija. Funkcija F v Newton-Leibnizovi formuli je lahko sicer katerikoli nedoločeni integral funkcije f, vendar pa mora biti zvezna na celem intervalu. Vzemimo na primer funkcijo

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1 - x^2}.$$

Če izračunamo odvod

$$F'(x) = \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1}{1 + x^2},$$

[1] Sir Isaac Newton (1642–1727), angleški matematik, fizik in astronom, skupaj z G. W. Leibnizom začetnik diferencialnega in integralnega računa.

se lahko zazdi, da je F nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

in jo uporabimo pri računanju integrala

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = F(\sqrt{3}) - F(0)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 0.\end{aligned}$$

Ker je $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ in $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\pi/3$, dobimo rezultat

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\pi/3.$$

To ni pravilen rezultat, kajti funkcija pod integralom je na integracijskem intervalu povsod pozitivna in mora biti tudi njen integral pozitiven.

Napaka je seveda v tem, da $F(x)$ ni nedoločeni integral funkcije $f(x)$, ker F ni zvezna na intervalu $[0, \sqrt{3}]$ — v točki 1 s tega intervala funkcija F sploh ni definirana, kaj šele da bi bila tam zvezna in odvedljiva.

Za nedoločeni integral funkcije $f(x) = 1/(1+x^2)$ lahko vzamemo funkcijo $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, ki je zvezna funkcija, ki je zvezna funkcija na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Pravilen račun je torej

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 0 = \pi/3.$$

■

5.4 Pravila za integriranje

Računanje nedoločenega integrala neke funkcije je odvajanju inverzna operacija, zato dobimo tabelo 5.1 elementarnih integralov iz tabele odvodov elementarnih funkcij (tabela 4.1).

Prav tako so pravila za integriranje preproste posledice ustreznih pravil za odvajanje. Zaradi tesne zveze med določenim in nedoločenim integralom je v večini primerov dovolj, če navedemo ustrezno pravilo za računanje nedoločnih integralov.

funkcija	integral	opomba
$\int x^r\,dx$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+C$	$r\neq -1$
$\int \frac{dx}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$	
$\int a^x\,dx$	$\dfrac{a^x}{\log a}+C$	$a>0;\ a\neq 1$
$\int e^x\,dx$	e^x+C	
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + C$	
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + C$	
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\operatorname{tg} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + C$	
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$	$\operatorname{arc\,tg} x + C$	
$\int \operatorname{ch} x\,dx$	$\operatorname{sh} x + C$	
$\int \operatorname{sh} x\,dx$	$\operatorname{ch} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$	$\operatorname{th} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$	$-\operatorname{cth} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$	$\log(x+\sqrt{x^2+a})+C$	

Tabela 5.1: Tabela elementarnih integralov

1. Če sta f in g integrabilni funkciji, sta integrabilni tudi njuna vsota in razlika in velja

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \tag{5.10}$$

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx. \tag{5.11}$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$ in $G(x) = \int g(x)\,dx$. Ker je $F'(x) = f(x)$ in $G'(x) = g(x)$, je

$$[F'(x) + G'(x)] = [F(x) + G(x)]' = f(x) + g(x),$$

zato je $F + G$ nedoločeni integral funkcije $f + g$, podobno velja tudi za razliko. To pravilo lahko razširimo na vsoto poljubnega končnega števila funkcij. Vsoto funkcij torej lahko členoma integriramo. □

Primer 5.4.1.

$$\int (x^2 - x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

■

2. Če je f integrabilna funkcija in k konstanta, je funkcija kf tudi integrabilna in velja

$$\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx. \tag{5.12}$$

Konstantni faktor smemo izpostaviti pred znak integrala.

Dokaz. Če je $F(x) = \int f(x)\,dx$, potem je

$$[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x),$$

torej je $kF(x)$ nedoločeni integral funkcije $kf(x)$. □

Primer 5.4.2. Izračunajmo integral

$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = x^3 + C.$$

Splošno je integral polinoma

$$\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\,dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C$$

spet polinom, njegova stopnja se pri integriranju zviša za 1. ■

3. **Vpeljava nove spremenljivke.** Če je $x = x(t)$ odvedljiva funkcija, je

$$\int f(x)\,dx = \int f[x(t)]x'(t)\,dt. \tag{5.13}$$

Dokaz. Odvod nedoločenega integrala $F(x) = \int f(x)\,dx$ je $f(x)$. Po pravilu za posredno odvajanje je

$$\frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f(x)x'(t),$$

zato je

$$F(x(t)) = \int f[x(t)]x'(t)\,dt.$$

□

Kadar pri računanju integralov uporabimo formulo (5.13) pravimo, da smo vpeljali novo spremenljivko. S pametno uvedbo nove spremenljivke si lahko olajšamo integracijo.

Primer 5.4.3.

(1) Integrale oblike

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx, \tag{5.14}$$

kjer je f poljubna odvedljiva funkcija, lahko izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke $u = f(x)$. Njen diferencial je $du = f'(x)\,dx$ in imamo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log|f(x)| + C.$$

Na primer:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\log|\cos x| + C.$$

(2) Recimo, da je

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Izračunajmo integral *premika* $f(x+a)$ in *raztega* $f(ax)$ funkcije $f(x)$. Naj bo $u = x + a$. Potem je $du = u'(x)dx = dx$, torej je

$$\begin{aligned} \int f(x+a)\, dx &= \int f(u(x))\, dx \\ = \int f(u)\, du &= F(u) + C = F(x+a) + C. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Naj bo $u = ax$. Potem je $du = a\, dx$ in

$$\int f(ax)\, dx = \int f(u(x))\, dx$$

$$= \int f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} F(u) + C = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

Nekaj konkretnih primerov:

- ker je
  $$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C,$$
  sledi iz pravila (5.15) za integral premika
  $$\int \sqrt{x+a}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+a)^3} + C;$$
- ker je
  $$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C, \quad \text{je}$$
  $$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}(ax) + C;$$

- izračunajmo integral

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

■

Pri vpeljevanju nove spremenljivke v določeni integral moramo paziti na meje. Pravilo se v tem primeru glasi takole:

Vpeljava nove spremenljivke v določeni integral. Naj bo f zvezna funkcija. Če je funkcija $x = x(t)$ monotona, zvezno odvedljiva na intervalu $[\alpha, \beta]$ in je $x(\alpha) = a$ in $x(\beta) = b$, velja formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)\,dt. \tag{5.16}$$

Primer 5.4.4. Integrale, v katerih nastopajo koreni kvadratnih izrazov, lahko pogosto poiščemo s pomočjo ustrezne *trigonometrične* ali *hiperbolične substitucije.*

(1) V integral

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

vpeljimo novo spremenljivko s predpisom $x = a\sin t$. Potem je $dx = a\cos t\,dt$, pri $t = 0$ je $x = 0$, pri $t = \pi/2$ je $x = a$ in funkcija $x(t) = a\sin t$ je monotona, zvezno odvedljiva na intervalu $[0, \pi/2]$, zato je

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\,dt.$$

Ker je $\cos t \geq 0$ za vsak $t \in [0, \pi/2]$, je

$$\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t,$$

torej je

$$I = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{a^2}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

(2) S substitucijo $x = \operatorname{sh} t$, zato $dx = \operatorname{ch} t\, dt$ izračunajmo integral

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Dobimo

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{cth} t + C = \frac{-\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} + C = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

■

4. **Integracija po delih (Integratio per partes)**

   Metodo dobimo iz formule za odvod produkta dveh funkcij. Naj bosta u in v odvedljivi funkciji. Zanju velja

$$(uv)' = u'v + uv',$$

zato je po definiciji določenega integrala

$$uv = \int u'v\, dx + \int uv'\, dx.$$

Od tod dobimo

$$\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx$$

ali krajše

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{5.17}$$

Primer 5.4.5. Integracija po delih:

1. Tipičen integral, ki ga računamo z integracijo po delih, je

$$I = \int (x-1)\sin x\, dx.$$

Vzemimo

$$\begin{aligned} x - 1 &= u, \quad & \sin x dx &= dv, \\ dx &= du, \quad & -\cos x &= v, \end{aligned}$$

in je

$$I = -(x-1)\cos x + \int \cos x\, dx = -(x-1)\cos x + \sin x + C.$$

2. Izračunajmo še
$$I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$
Naj bo
$$\begin{aligned} x &= u, & \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx &= dv, \\ dx &= du, & \int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx &= -\frac{1}{2(1+x^2)} = v, \end{aligned}$$
in
$$\begin{aligned} I &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} + C. \end{aligned}$$

■

5.5 Integrali elementarnih funkcij

Računanje integralov je dosti bolj zapleten problem kot računanje odvodov. Za vsako funkcijo, ki je sestavljena iz elementarnih funkcij vedno obstaja točno določen postopek, s katerim izračunamo njen odvod, ta se spet izraža z elementarnimi funkcijami. Za integrale to še zdaleč ne velja, saj na primer ni pravila, ki bi natančno povedalo, kako izračunati integral produkta ali kvocienta dveh funkcij. Še več — integral funkcije, ki se izraža kot produkt, kvocient, potenca ali kompozitum elementarnih funkcij, se pogosto ne izraža več z elementarnimi funkcijami. Tako sta, na primer integrala
$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{in} \quad \int e^{x^2}\,dx,$$
povsem novi funkciji, ki ju ne moremo izraziti z vsoto, produktom, potenco ali kompozitumom elementarnih funkcij. Za nekatere razrede funkcij pa vseeno obstaja algoritem za računanje nedoločenih integralov. Veliko teh algoritmov je uporabljenih v različnih računalniških programih za simbolično računanje, s pomočjo katerih lahko zelo uspešno računamo nedoločene integrale. Za

boljše razumevanje delovanja teh programov in tudi samega pojma integrala bomo v tem razdelku bomo opisali nekaj takih algoritmov.

Določene integrale lahko zelo uspešno računamo tudi s pomočjo različnih numeričnih metod, ki jih tu ne bomo obravnavali.

Integrali racionalnih funkcij

Primer 5.5.1. Začnimo z nekaj značilnimi zgledi integralov racionalnih funkcij:

1. Integral
$$I = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$$
brez težav izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke $t = x - 1$. Tako je $x = t + 1$ in $dx = dt$:
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^2+2t+2}{t^3}\,dt \\ &= \int (t^{-1} + 2t^{-2} + 2t^{-3})\,dt \\ &= \log t - \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} + C. \end{aligned}$$
Na podoben način izračunamo vse integrale oblike
$$I = \int \frac{P_m(x)}{(x-a)^n}\,dx. \tag{5.18}$$
Z novo spremenljivko $t = x - a$, $dt = dx$ integral prevedemo na
$$I = \int \frac{P_m(a+t)}{t^n}\,dt = \int \frac{S_m(t)}{t^n}\,dt,$$
kjer je $S_m(t)$ polinom.

2. Funkcija v integralu
$$I = \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx$$

ima v imenovalcu nerazcepno kvadratno funkcijo (njena diskriminanta D je enaka -4). Zapišemo jo kot vsoto dveh členov, kjer ima prvi člen v števcu odvod imenovalca:

$$\frac{2x+4}{x^2+2x+2} = \frac{A(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{B}{x^2+2x+2}.$$

Konstanti A in B določimo iz enačbe

$$2x+4 = A(2x+2) + B$$

tako, da izenačimo koeficiente pri potencah spremenljivke x:

$$2A = 2 \quad \text{in} \quad 2A + B = 4,$$

od koder dobimo $A = 1$, $B = 2$ in

$$I = \int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+2} + 2\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Prvi integral je oblike (5.14) in ga že poznamo, drugega prevedemo na elementaren integral tako, da imenovalec zapišemo kot vsoto popolnega kvadrata in konstante:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$$

in dobimo

$$I = \log(x^2+2x+2) + 2\operatorname{arc\,tg}(x) + C.$$

Podoben postopek lahko uporabimo za računanje poljubnega integrala oblike

$$I = \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx, \tag{5.19}$$

kjer je imenovalec nerazcepna kvadratna funkcija. Integral take oblike se vedno izraža kot vsota

$$I = A\log(x^2+px+q) + B\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C,$$

kjer je $D = p^2 - 4q$ diskriminanta kvadratne funkcije x^2+px+q, števec $2x+p = (x^2+px+q)'$ pa njen odvod.

3. Funkcijo v integralu

$$\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)}\,dx$$

zapišemo kot vsoto *parcialnih ulomkov*:

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Koeficiente A, B in C določimo iz enačbe

$$x^2+2 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1),$$

ki mora veljati pri vsakem x. Če vanjo vstavimo $x=0$, dobimo $A=-1$. Pri $x=1$ dobimo $B=1$, pri $x=-1$ pa $C=1$. Od tod sledi:

$$\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -\log|x| + \log|x-1| + \log|x+2| + C = \log\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right| + C.$$

■

Podoben postopek kot v zadnjem primeru lahko uporabimo pri računanju integrala poljubne racionalne funkcije

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_m x^m + \cdots + p_0}{q_n x^n + \cdots + q_0}, \tag{5.20}$$

kjer je polinom P_m stopnje m in polinom Q_n stopnje n. Če je $m > n$, polinoma delimo in dobimo

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = A_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)},$$

kjer je A_{m-n} polinom stopnje $m-n$, $R_k(x)$ pa je ostanek pri deljenju, ki ima stopnjo $k < n$.

Racionalno funkcijo

$$\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n$$

lahko zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov, ki imajo v imenovalcu nerazcepne faktorje polinoma Q_n in integriramo vsak člen posebej. Integral tako razpade na integrale posameznih členov, med njimi pa so lahko le funkcije naslednjih oblik:

1. $\dfrac{u_j(x)}{(x-a)^i}$, $j < i$,

2. $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, z diskriminanto $D = p^2 - 4q < 0$ in

3. $\dfrac{v_j(x)}{(x^2+px+q)^i}$, $j < 2i$.

Integrala prve in druge funkcije smo že izračunali, s tretjim integralom je več dela. Izračunamo ga tako, da z ustreznimi substitucijami in z integracijo per partes (tako kot v primeru 5.4.5) znižamo stopnjo i in ga prevedemo na integral druge vrste. Če posamezne integrale seštejemo, dobimo splošno obliko integrala racionalne funkcije:

$$\begin{aligned}\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx & \\ = \frac{S_{l-1}(x)}{T_l(x)} & + \sum_j A_j \log|x-a_i| + \sum_j B_j \log(x^2+p_jx+q_j) \\ & + \sum_j C_j \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+p_j}{\sqrt{-D_j}} + D,\end{aligned}$$

kjer v imenovalcu $T_l(x)$ nastopajo vsi nerazcepni faktorji funkcije $Q_n(x)$ s potenco, ki je za 1 manjša od prvotne, $(x-a_i)$ so vsi linearni nerazcepni faktorji polinoma Q_n (a_i so vse realne ničle polinoma Q_n), $x^2+p_jx+q_j$ pa so vsi nerazcepni kvadratni faktorji v razcepu polinoma Q_n (D_j so njihove diskriminante).

Primer 5.5.2. Integral

$$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x + 1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$$

je vsota

$$I = \frac{Ax^2+Bx+C}{x(x^2+1)} + D\log|x| + E\log(x^2+1) + F\operatorname{arc\,tg} x + G. \tag{5.21}$$

Neznane koeficiente A, B, C, D, E in F določimo tako, da enačbo (5.21) odvajamo

$$\frac{x^5-x^4+x+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{(x^3+x)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)(3x^2+1)}{x^2(x^2+1)^2}$$
$$+\frac{D}{x} + \frac{2Ex}{x^2+1} + \frac{F}{x^2+1},$$

pomnožimo s skupnim imenovalcem

$$\begin{aligned}x^5 - x^4 + x + 1 \quad = \quad & 2Ax^4 + 2Ax^2 + Bx^3 + Bx - 3Ax^4 \\ & -3Bx^3 - 3Cx^2 - Ax^2 - Bx - C \\ & +D(x^5+2x^3+x) + 2Ex^3(x^2+1) + Fx^2(x^2+1)\end{aligned}$$

in primerjamo koeficiente pri vsaki od potenc spremenljivke x. Tako dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rrrrrrcr} & & & +D & +2E & & = & 1 \\ -A & & & & & +F & = & -1 \\ & -2B & & +2D & +2E & & = & 0 \\ A & & -3C & & & +F & = & 0 \\ & & & D & & & = & 1 \\ & & -C & & & & = & -1 \end{array}$$

od koder izračunamo koeficiente

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1, \quad E = 0, \quad F = 1,$$

in integral je enak

$$I = \frac{2x^2 + x + 1}{x^5 - x^4 + x + 1} + \log|x| + \operatorname{arc\,tg} x + G.$$

■

Integrali nekaterih algebraičnih funkcij

Oglejmo še nekaj tipičnih integralov, ki jih lahko s primerno substitucijo prevedemo na integrale racionalnih funkcij ali kako drugače integriramo.

1. Začnimo s primerom:

   Primer 5.5.3.
   $$I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$$
   prevedemo na racionalen integral z vpeljavo nove spremenljivke
   $$\frac{1-x}{1+x} = t^2, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2}$$
   in dobimo
   $$I = -4 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt,$$
   to pa smo že izračunali v primeru 5.4.5. ■

   Na podoben način lahko integral vsake funkcije, ki se izraža kot racionalna funkcija različnih korenov istega ulomljenega linearnega izraza $(ax + b)/(cx + d)$, prevedemo na integral racionalne funkcije.

2. Integrale, ki vsebujejo izraz $\sqrt{ax^2+bx+c}$ lahko pogosto izračunamo s kakšno trigonometrično ali hiperbolično substitucijo (glej primer 5.4.4). Za integrale oblike

$$I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \tag{5.22}$$

pa lahko vnaprej uganemo, s kakšnimi funkcijami se izražajo, kajti funkcijo pod integralom lahko vedno zapišemo v obliki

$$\begin{aligned}&\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\\ &\quad = \left(Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.\end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$I = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\lambda\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

integral, ki je ostal lahko prevedemo na elementaren integral tako, da izraz pod korenom dopolnimo do popolnega kvadrata.

Primer 5.5.4. Napišimo nastavek za integral

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx = \int \frac{x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx \\ &= (Ax+B)\sqrt{x^2-2x-1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}.\end{aligned}$$

Neznane koeficiente A, B in λ določimo tako, da to enačbo odvajamo:

$$\begin{aligned}&\frac{x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}\\ &\quad = A\sqrt{x^2-2x-1} + \frac{(Ax+B)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x-1}},\end{aligned}$$

pomnožimo z imenovalcem $\sqrt{x^2-2x-1}$

$$x^2-2x-1 = A(x^2-2x-1) + A(x^2-x) + B(x-1) + \lambda,$$

in primerjamo koeficiente na obeh straneh, da pridemo do sistema linearnih enačb:

$$\begin{array}{rrrcr} 2A & & & = & 1 \\ -3A & +B & & = & -2 \\ -A & -B & +C & = & -1, \end{array}$$

od koder dobimo $A = 1/2$, $B = -1/2$ in $C = -1$. Ker je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-2}} = \log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|,$$

je končni rezultat

$$I = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|.$$

■

3. Integrali oblike
$$\int \sqrt{P_n(x)}\,dx,$$
kjer je $P_n(x)$ polinom stopnje $n > 2$ se ne izražajo vedno z elementarnimi funkcijami. Če je $n = 3$ ali $n = 4$ jim pravimo *eliptični integrali* in jih lahko z ustrezno vpeljavo nove spremenljivke prevedemo na eno od naslednjih oblik:
$$\begin{array}{ll} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} & \text{eliptični integral prve vrste} \\ \displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} & \text{eliptični integral druge vrste} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} & \text{eliptični integral tretje vrste,} \end{array}$$
ki so vsi neelementarne funkcije.

4. Integrale oblike
$$I = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{5.23}$$

kjer so eksponenti m, n in p racionalna števila, a in b pa poljubni, od 0 različni realni konstanti, imenujemo *binomski integrali.* Binomski integrali se izražajo z elementarnimi funkcijami samo v naslednjih treh primerih:

(1) p je celo število — v tem primeru se integral s substitucijo $t = x^k$, kjer je k imenovalec ulomka m, prevede na integral racionalne funkcije;

(2) $(m+1)/n$ je celo število — v tem primeru vpeljemo novo spremenljivko kot $a + bx^n = t^s$, kjer je s imenovalec ulomka p;

(3) $p + (m+1)/n$ je celo število. Novo spremenljivko v tem primeru vpeljemo kot $ax^{-n} + b = z^s$, kjer je s imenovalec ulomka p.

Kadar binomski integral ne ustreza nobenemu od teh treh primerov, ga ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami.

Primer 5.5.5. Izračunajmo integral

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

To je binomski integral (5.23) z $m = 0$, $n = 3$ in $p = -1/3$, zato novo spremenljivko vpeljemo kot $x^{-3} + 1 = t^3$, oz $x^3 = 1/(t^3 - 1)$, od koder je $-3x^{-4}\,dx = 3t^2\,dt$. Tako dobimo

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{x^4\sqrt[3]{x^{-3}+1}} = \int \frac{-t\,dt}{t^3-1},$$

kar je integral racionalne funkcije, ki ga znamo izračunati:

$$I = \frac{1}{6}\log\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Končni rezultat dobimo ko vstavimo $t = \sqrt[3]{1+x^3}/x$. ■

Integrali trigonometričnih funkcij

Pri integraciji trigonometričnih funkcij si pogosto lahko pomagamo z znanjem trigonometrije.

1. Integrale oblike
$$I = \int \cos^m x \sin^n x \, dx \tag{5.24}$$
najlaže izračunamo, če je vsaj eden od eksponentov liho število. Če je, npr., $m = 2k+1$ liho število, vzamemo za novo spremenljivko $t = \sin x$ (torej $dt = \cos x \, dx$) in dobimo, upoštevajoč še zvezo $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, da je
$$I = \int (1-t^2)^k t^n \, dt.$$
To je integral polinoma, kadar sta eksponenta pozitivni števili, sicer pa integral racionalne funkcije.

Če pa sta oba eksponenta v integralu (5.24) sodi števili, v integrandu znižamo eksponente s pomočjo formul
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{5.25}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{5.26}$$
$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \tag{5.27}$$

Primer 5.5.6. Izračunajmo integral
$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1-\cos 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C \end{aligned}$$
■

2. Integrale oblike
$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \quad \int \sin mx \cos nx \, dx, \quad \int \cos mx \cos nx \, dx$$

poenostavimo s pomočjo formul

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos{(m-n)x} - \cos{(m+n)x}), \tag{5.28}$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin{(m-n)x} + \sin{(m+n)x}), \tag{5.29}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos{(m-n)x} + \cos{(m+n)x}). \tag{5.30}$$

Primer 5.5.7. Izračunajmo integral

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \cos x \, dx &= \frac{1}{2}\int \sin 6x \, dx + \frac{1}{2}\int \sin 4x \, dx \\ &= \frac{-1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.\end{aligned}$$

■

3. Integrale oblike

$$I = \int R(\sin x, \cos x) \, dx, \tag{5.31}$$

kjer je R racionalna funkcija spremenljivk $\sin x$ in $\cos x$, lahko z uvedbo nove spremenljivke $t = \mathrm{tg}(x/2)$ prevedemo v integral racionalne funkcije, saj se $\sin x$, $\cos x$ in dx izražajo kot racionalne funkcije s $\mathrm{tg}\, x/2$:

$$\sin x = \frac{2\sin x/2 \cdot \cos x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{5.32}$$

$$\cos x = \frac{\sin^2 x/2 - \cos^2 x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{5.33}$$

$$x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\, t; \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \tag{5.34}$$

Primer 5.5.8. Izračunajmo integral

$$I = \int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}.$$

Z zgornjo substitucijo dobimo

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2t+1+t^2)} = \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \log{(1+\mathrm{tg}(x/2))} + C.\end{aligned}$$

■

4. Kadar v integralu (5.31) funkcija R zadošča relaciji

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

(tj. takrat, kadar so vsi členi funkcije R sode stopnje), pridemo do integrala racionalne funkcije učinkoviteje z uvedbo nove spremenljivke $t = \operatorname{tg} x$, saj je

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \tag{5.35}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \tag{5.36}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \tag{5.37}$$

Čeprav substitucija sama ni racionalna, je njen rezultat, zaradi predpostavke o sodih stopnjah, vedno integral racionalne funkcije, ki je praviloma za polovico nižje stopnje, kot če bi uporabili substitucijo $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

Primer 5.5.9. Izračunajmo integral

$$I = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Nova spremenljivka bo $t = \operatorname{tg} x$, upoštevamo (5.35–5.37) in imamo

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{1}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2+t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

■

Integrali transcendentnih funkcij

Med integrali transcendentnih funkcij je veliko takih, ki jih ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami, nekatere pa s primerno substitucijo ali integracijo po delih prevedemo na racionalne.

Primer 5.5.10.

1. Integrale oblike
$$\int R(e^x)\,dx,$$
kjer je R racionalna funkcija, prevedemo na racionalne integrale s substitucijo $t = e^x$, $x = \log t$, $dx = dt/t$. Na primer
$$I = \int \operatorname{th} x\,dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$
$$= \int \frac{t - 1/t}{t + 1/t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2 - 1}{t(t^2+1)}\,dt.$$
Funkcijo pod integralom razcepimo na parcialne ulomke:
$$\begin{aligned} \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} &= \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2+1}, \\ t^2 - 1 &= A(t^2+1) + (Bt + C)t, \end{aligned}$$
od koder sledi
$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 0$$
in
$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt \\ &= -\log|t| + \log(t^2+1) + C = \log\left|\frac{t^2+1}{t}\right| + C. \end{aligned}$$

2. Če v integral
$$I = \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$$
vpeljemo
$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arc\,tg} x, & dv &= dx, \\ du &= \frac{dx}{1+x^2}, & v &= x, \end{aligned}$$

dobimo

$$\begin{aligned} I &= x \operatorname{arc\,tg} x + \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= x \operatorname{arc\,tg} x + \log \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

■

5.6 Nepravi (posplošeni) integrali

Določeni integral smo definirali ob predpostavki, da je integracijski interval končen, funkcija, ki jo integriramo, pa omejena. V tem razdelku bomo pojem integrala posplošili tudi na funkcije, ki niso omejene, in na neskončna integracijska območja.

Vzemimo najprej, da je integracijski interval $[a, b]$ končen, funkcija f pa na njem ni omejena. Naj bo funkcija f zvezna na $[a, b)$, v točki b naj ima pol.

Izberimo si pozitivno število $\varepsilon < b - a$. Na intervalu $[a, b - \varepsilon]$ je funkcija f zvezna, zato tudi omejena, in določeni integral

$$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx \tag{5.38}$$

obstaja.

Definicija 5.6.1. Če obstaja limita integrala $I(\varepsilon)$ (5.38), ko $\varepsilon \to 0$, ji pravimo *posplošeni* ali *nepravi* integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ in pišemo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

Če ima f pol v točki a in je drugod na $(a, b]$ zvezna, definiramo podobno:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx,$$

če ta limita obstaja.

Kadar ima f pol v kaki notranji točki $c \in [a, b]$, interval razdelimo na dva podintervala $[a, c]$ in $[c, b]$ ter poiščemo limiti

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \searrow 0} \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx.$$

Primer 5.6.1.

1. Raziščimo obstoj integrala

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}; \quad p < 0.$$

   Funkcija $1/x^p$ ima pol v $x = 0$, zato je po zgornji definiciji

$$I = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\varepsilon^1.$$

   Če je $p < 1$, limita na desni obstaja in je enaka $1/(1-p)$, če je $p > 1$, pa funkcija $1/\varepsilon^{p-1}$ z $\varepsilon \to 0$ divergira proti ∞ in integral ne obstaja.

2. Preverimo integrabilnost funkcije $1/(3-x)^2$ na intervalu $[1, 3]$. Funkcija ima pol pri $x = 3$, zato je

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{(3-x)^2} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_1^{3-\varepsilon} \frac{dx}{(3-x)^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\frac{1}{3-x}\right]_1^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

   ta limita pa ne obstaja, zato funkcija $1/(3-x)^2$ ni integrabilna na intervalu $[1, 3]$. ■

Naj bo funkcija $f(x)$ definirana in omejena na neomejenem intervalu, na primer $[a, \infty)$ in naj bo integrabilnana vsakem končnem podintervalu $[a, b]$.

Definicija 5.6.2. Če obstaja limita

$$I(b) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

ji pravimo *posplošeni* ali *nepravi* integral funkcije f na intervalu $[a, \infty)$ in pišemo:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Podobno definiramo integral na intervalu $(-\infty, b]$. Integral na intervalu $(-\infty, \infty)$, ki je na obe strani neomejen, je enak

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx,$$

in obstaja, če obe limiti obstajata in sta končni.

Primer 5.6.2. Izračunajmo:

$$I(p) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Če je $p < 1$, integral ne obstaja, za $p > 1$ je $I(p) = 1/(p-1)$. ■

Vrednost posplošenega integrala lahko približno izračunamo tako, da ga nadomestimo z določenim integralom, ki se od posplošenega le malo razlikuje, na primer

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \approx \int_a^b f(x)\,dx,$$

za dovolj velik b. Pri tem pa moramo vedeti, ali posplošeni integral sploh obstaja, zato navedimo še nekaj kriterijev, s katerimi si lahko pomagamo pri ugotavljanju obstoja posplošenih integralov.

Limita v definiciji 5.6.2 obstaja natanko takrat, kadar se vrednosti integrala funkcije f na intervalih $[a, b_1]$ in $[a, b_2]$ ne razlikujeta dosti, če sta b_1 in b_2 dovolj veliki števili. Drugače povedano:

Izrek 5.6.1. *Integral funkcije f na intervalu $[a, \infty)$ obstaja, natanko takrat, kadar za vsak ε obstaja tak b, da je*

$$\left|\int_a^{b_1} f(x)\,dx - \int_a^{b_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{b_2}^{b_1} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

če sta $b_1, b_2 > b$.

Podoben sklep lahko zapišemo za integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, kjer ima pol. S tem opisom si lahko pomagamo, da dokažemo naslednji izrek:

Izrek 5.6.2. (Primerjalni kriterij) *Naj bo $g(x) > 0$ taka funkcija, definirana na $[a, \infty)$, da za vsak $x \in [a, \infty)$ velja $|f(x)| \leq g(x)$. Če obstaja integral funkcije g na $[a, \infty)$, obstaja tudi integral funkcije f na $[a, \infty)$.*

Dokaz je preprost: za vsak ε obstaja tak b, da je

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx < \varepsilon,$$

če je $b < b_1 < b_2$. □

Primerjalni kriterij smo srečali že pri ugotavljanju konvergence vrst. Tako kot pri vrstah, ga lahko tudi pri integralih uporabljamo v obe smeri: z njim lahko dokažemo, da integral funkcije f obstaja, ali pa, da integral funkcije g ne obstaja.

Podoben kriterij lahko zapišemo za integral na omejenem intervalu, kjer ima funkcija pol.

Primer 5.6.3.

1. Integral
$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^3}\,dx. \tag{5.39}$$
obstaja, ker za vsak $x \in [1, \infty)$ velja $|\cos x| \leq 1$, zato je tudi $|x^{-3}\cos x| \leq x^{-3}$, in ker obstaja integral
$$\int_1^\infty x^{-3}\,dx = \lim_{x\to\infty} \left[-2x^{-2}\right]_1^x = 2.$$

2. Prav tako obstaja integral
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}},$$
saj je za vsak $x \in (0, 1]$
$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

pa očitno obstaja.

3. Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}},$$

ne obstaja, saj za vsak $x \geq 1$ velja $\sqrt[3]{x} \leq \sqrt{x}$, torej je

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \geq \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2} - 1$$

ne obstaja. ■

Zveza med vrstami in posplošenimi integrali pa se še nadaljuje:

Izrek 5.6.3. *Če je $f(x)$ nenegativna zvezna in padajoča funkcija na $[a,\infty)$, posplošeni integral in vrsta*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad \textit{in} \quad \sum_1^\infty f(n)$$

konvergirata ali pa divergirata hkrati.

Izrek 5.6.3 lahko uporabljamo za dokazovanje konvergence ali divergence integralov, še bolj pogosto pa ga uporabljamo za dokazovanje konvergence ali divergence vrst. V tem primeru mu pravimo *integralski kriterij za konvergenco vrst.*

Dokaz. Ker je funkcija $f(x)$ padajoča, je za vsak $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1),$$

in za delne vsote vrste veljata oceni:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \\ &= \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) = S_{N+1} - S_1. \end{aligned}$$

Če je integral konvergenten, za vsak N velja:

$$S_N \leq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Zaporedje delnih vsot je omejeno in, ker ima same pozitivne člene, je vrsta konvergentna. Če je vrsta konvergentna, velja za vsak N

$$I_N = \int_1^{N} f(x)\,dx \leq \sum_1^{N} f(n) \leq \sum_1^{\infty} f(n).$$

Zaporedje integralov I_N je naraščajoče in omejeno, torej konvergentno, to pa že pomeni, da posplošeni integral obstaja. □

Primer 5.6.4. V 2. poglavju smo s precej težavami dokazali, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergentna natanko takrat, kadar je $p > 1$. Preprosteje bi do tega rezultata prišli z uporabo integralskega kriterija, saj je enostavno ugotoviti, da je integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

konvergenten za $p > 1$ (glej primer 5.6.2. ■

Poglavje 6

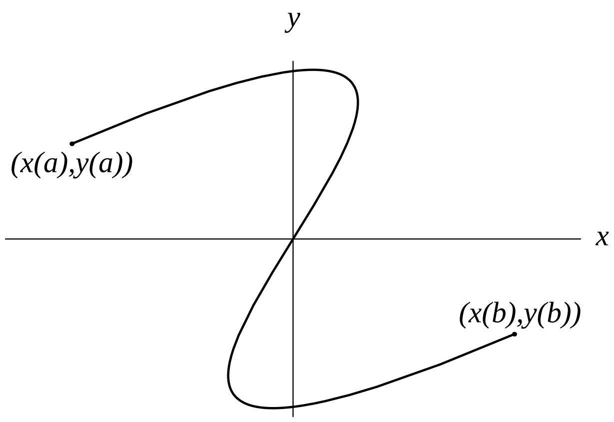
Krivulje v ravnini

6.1 Risanje krivulj

Krivulja v ravnini je zvezna preslikava

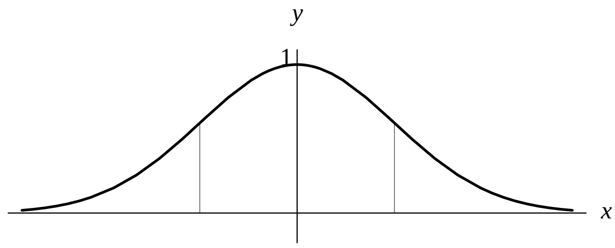
$$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2,$$

ki vsaki točki $t \in [\alpha, \beta]$ priredi neko točko $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.



Slika 6.1: Krivulja v ravnini

Točki $(x(a), y(a))$ in $(x(b), y(b))$ imenujemo krajišči ali robni točki krivulje. Če se ujemata, torej če je $x(a) = x(b)$ in $y(a) = y(b)$, je krivulja *sklenjena*. Točka, ki jo dobimo pri dveh različnih vrednostih $t_1 \neq t_2 \in [a, b]$ je *samopresečišče* krivulje ali *dvojna točka*. Vsaka sklenjena krivulja ima vsaj eno



Slika 6.2: Krivulja, dana eksplicitno z enačbo $y = e^{-x^2}$.

samopresečišče: točko $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$. Če je to edino samopresečišče, je krivulja *enostavna sklenjena*.

Krivuljo v ravnini lahko opišemo na več načinov, ki jih bomo na kratko opisali v nadaljevanju.

6.1.1 Eksplicitni opis krivulje.

Krivulja je lahko dana kot graf neke funkcije $y = f(x)$. V tem primeru vsakemu številu $x \in D_f$ pripada natanko ena točka $(x, f(x))$ na krivulji. Krivulja, ki je opisana eksplicitno s funkcijo f seka vsako navpično premico v največ eni točki.

Primer 6.1.1. Krivulji, ki je graf funkcije $f(x) = e^{-x^2}$ pravimo *Gaussova krivulja*. Naštejmo nekaj njenih lastnosti:

1. Je simetrična glede na os y, ker je f soda funkcija.
2. Ima vodoravno asimptoto $y = 0$, ker je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
3. Odvod $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ je pozitiven za $x < 0$, tu funkcija narašča, in negativen za $x > 0$, tu funkcija pada. V kritični točki $x = 0$ je zato maksimum.
4. Drugi odvod $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ je pozitiven za $|x| > 1/\sqrt{2}$, funkcija je tu konveksna, in negativen za $|x| < 1/\sqrt{2}$, funkcija je tu konkavna. Točki $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sta prevoja.

■

Krivulja je lahko dana tudi eksplicitno z enačbo $x = g(y)$. Taka krivulja seka vodoravne premice v največ eni točki.

Primer 6.1.2. Narišimo še krivuljo $x = e^{\operatorname{tg} y}$.

Slika 6.3: Krivulja, dana z enačbo $x = e^{\operatorname{tg} y}$.

6.1.2 Parametričen opis krivulje

Krivulja je opisana *parametrično* s funkcijama $x = x(t)$ in $y = y(t)$, $t \in [a, b]$. Predpisu

$$t \to (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

pravimo *parametrizacija* krivulje, spremenljivki t pa parameter.

Primer 6.1.3.

1. S predpisom

   $$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   je dan parametričen opis krožnice s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in s polmerom a. Ko parameter t teče od 0 proti 2π, se točka na krožnici giblje od točke $(1, 0)$ v pozitivni smeri, tj. v smeri nasprotni smeri urinega kazalca. Krožnica je primer enostavne sklenjene krivulje.

   Tudi predpis

   $$x = a \sin t, \quad y = a \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   je parametrizacija iste krožnice, le da je začetna točka v tem primeru $(0, 1)$ in smer gibanja nasprotna kot prej.

2. Predpis

   $$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   določa elipso s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in z glavnima osema a in b, saj je

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Krivulja, dana z

$$x = a\operatorname{ch} t, \quad y = a\operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R},$$

je hiperbola

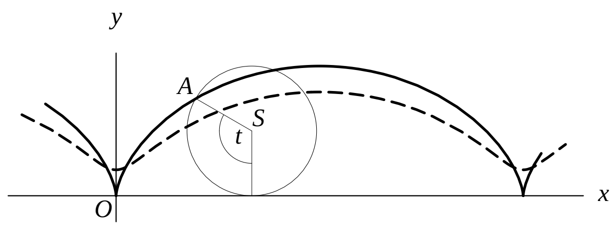
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

■

Krivulja v ravnini še zdaleč nima ene same parametrizacije — krožnico $x^2 + y^2 = a^2$ smo parametrizirali že na dva načina. Različnih parametričnih opisov dane krivulje je zelo veliko.

Oglejmo si še nekaj značilnih parametrično danih krivulj.

Cikloida je krivulja, ki jo opiše točka A na krožnici, ki se kotali po osi x. Zapišimo enačbo cikloide v parametrični obliki, parameter t pa naj bo kot zasuka krožnice glede na začetno lego, ki je izbrana tako, da je središče krožnice v točki $(0, a)$, točka A pa v koordinatnem izhodišču (glej sliko 6.4).



Slika 6.4: Cikloida in trohoida

Ko se krožnica zavrti za kot t, se njeno središče premakne v točko (at, a), točka A pa se zavrti okrog središča kroga, tako da so njene nove koordinate

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

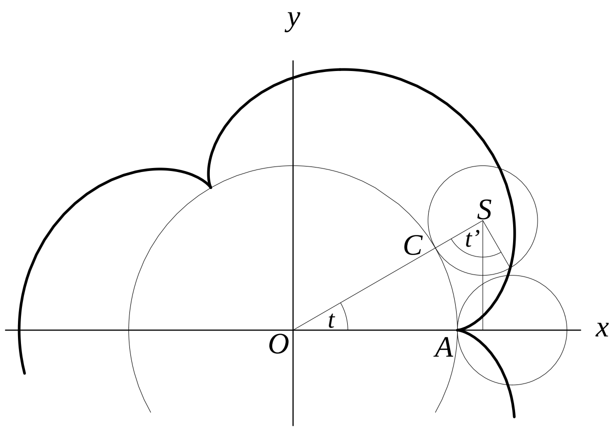
Ko krožnica naredi en cel obrat, opiše točka A eno vejo cikloide in se spet dotakne osi x, razlika med dvema dotikališčema je 2π.

Trohoida Nalogo lahko posplošimo — opišimo gibanje točke v notranjosti kroga, ki je oddaljena od središča za $b < a$. Krivulji, ki jo taka točka opiše, pravimo *trohoida*, njena parametrizacija je:

$$x = at - b\sin t, \quad y = a - b\cos t.$$

Cikloida je seveda poseben primer trohoide.

Epicikloida Nalogo pa lahko posplošimo tudi v drugo smer. Namesto po osi x (tj. po premici) se lahko krožnica kotali pa kakšni drugi krivulji. Če se kotali po zunanji strani druge krožnice, pravimo krivulji, ki jo opiše točka A na krožnici, *epicikloida*.

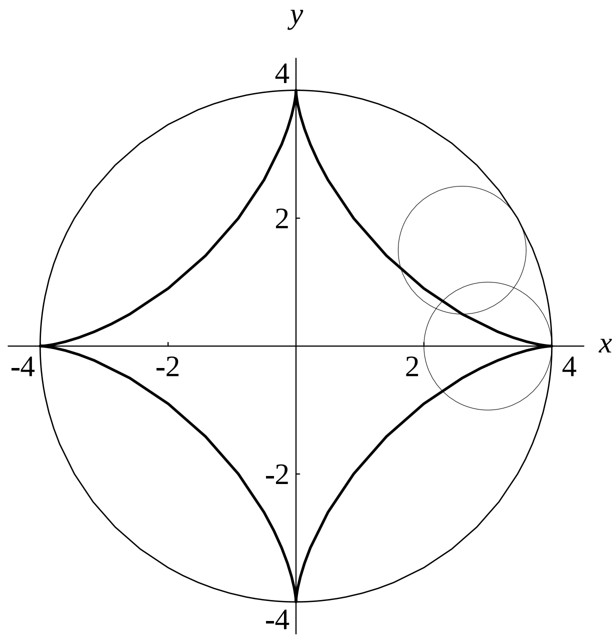


Slika 6.5: Epicikloida

Polmer fiksne krožnice naj bo b, polmer kotaleče se pa a. Kadar je razmerje b/a celo število, bo po enem obhodu točka A spet v točki izhodiščni točki. Epicikloida je v tem primeru enostavno sklenjena krivulja. Če je $b/a = p/q$ racionalno število (p/q je okrajšan ulomek), se bo točka A vrnila v izhodiščno točko po q obhodih. Epicikloida bo v tem primeru sklenjena, vendar bo imela samopresečišča. Če pa je b/a iracionalno število, se točka A ne bo nikoli več vrnila v izhodiščno točko in epicikloida v tem primeru ne bo sklenjena krivulja.

Najenostvnejšo epicikloido dobimo takrat, ko imata krožnici enaka polmera $a = b$. Tedaj se točka A vrne v začetno lego po enem obhodu in epicikloida ima eno samo vejo. Taki epicikloidi pravimo, zaradi njene oblike, *srčnica* ali *kardioida*.

Hipocikloida Če se krožnica kotali po notranji strani fiksne krožnice (ki mora v tem primeru biti večja od prve), dobimo krivuljo, ki ji pravimo *hipocikloida.*



Slika 6.6: Astroida

Tudi hipocikloida je enostavna sklenjena krivulja, če je razmerje b/a celo število. Hipocikolida z razmerje $b/a = 2$ je premer kroga (ki ga točka opiše dvakrat, da dobimo sklenjeno krivuljo). Hipocikloidi z razmerjem $b/a = 4$ pravimo *astroida.* Njena enačba v parametrični obliki je

$$x = 4a\cos^3 t, \quad y = 4a\sin^3 t.$$

Parametrizaciji epicikloide in hipocikloide sta izpeljani v [8].

Tangenta na parametrično dano krivuljo Krivulja, dana v parametrični obliki z $x = x(t)$, $y = y(t)$, je *gladka*, če sta odvoda $\dot{x}(t)$ in $\dot{y}(t)$ zvezni funkciji, ki nimata pri nobenem t obe hkrati vrednost 0. Če je v neki točki t_0 odvod $\dot{x} = \dot{x}(t) \neq 0$, je v okolici točke t_0 funkcija $x(t)$ monotona, tako da obstaja inverzna funkcija $t = t(x)$ in y se z x izraža eksplicitno:

$$y = y(t(x)).$$

Izračunajmo odvod:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dx}{dx/dt} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Od tod sledi, da obstaja tangenta na krivuljo v točki t_0, njena enačba je:

$$y - y(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

V okolici točke, kjer je $\dot{x}(t_0) = 0$ in $y(\dot{t_0}) \neq 0$, pa je funkcija y monotona in je $x = x(t(y))$. Odvod je

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = 0,$$

tangenta je v takih točkah navpična.

Primer 6.1.4.

1. Zapišimo enačbo tangente na cikloido v točki $x_0 = a(t_0 - \sin t_0)$, $y_0 = a(1 - \cos t_0)$.

   Smerni koeficient tangente je

   $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t_0}{1 - \cos t_0},$$

   zato je enačba tangente

   $$y = \frac{\sin t_0}{1 - \cos t_0}(x - x_0) + y_0.$$

2. Dokažimo: odsek na tangenti na astroido, ki ga odrežeta koordinatni osi, je v vseh točkah astroide enak.

   Smerni koeficient tangente je

   $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{12a \sin^2 t \cos t}{-12a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t,$$

   od koder dobimo enačbo tangente

   $$y - 4a \sin^3 t = -\operatorname{tg} t(x - 4a \cos^3 t),$$

ki jo pomnožimo s $\cos t$ in preuredimo

$$y \cos t + x \sin t = 2a \sin t \cos t.$$

Tako sta presečišči tangente z abscisno in ordinatno osjo

$$a_x = 2a \cos t \quad \text{in} \quad a_y = 2a \sin t,$$

razdalja med točkama $(2a \cos t, 0)$ in $(0, 2a \sin t)$ pa je

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2a,$$

neodvisno od t. ■

6.1.3 Krivulje v polarnem koordinatnem sistemu

Polarni koordinatni sistem v ravnini je določen z izbiro točke, ki predstavlja koordinatno izhodišče O, in poltraka z začetkom v izhodišču, ki predstavlja polarno os. Točka v ravnini je v tem koordinatnem sistemu določena s *polarnim radijem* r, ki je oddaljenost točke od izhodišča, in s *polarnim kotom* φ, ki ga daljica med točko in koordinatnim izhodiščem oklepa s polarno osjo. Če je v ravnini že izbran kartezični koordinatni sistem, običajno koordinatno izhodišče polarnega in kartezičnega koordinatnega sistema sovpadata, polarna os pa je na pozitivnem delu osi x. V tem primeru se kartezične koordinate izražajo s polarnimi z:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \tag{6.1}$$

polarne s kartezičnimi pa z:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \tag{6.2}$$

Krivulja v polarnem koordinatnem sistemu je določena s funkcijo

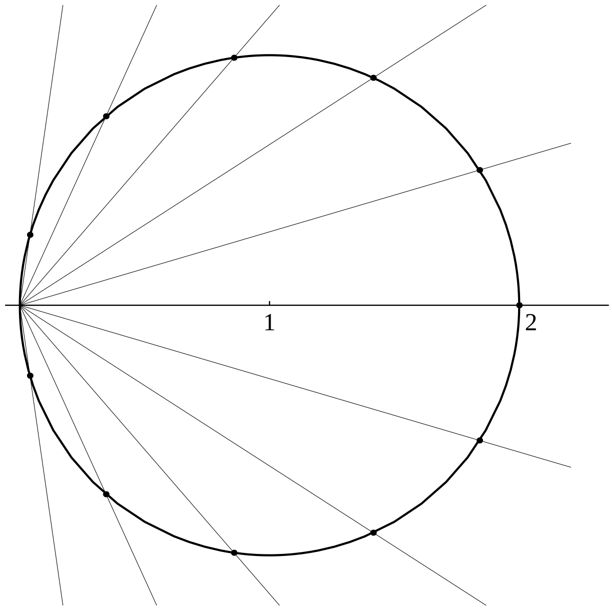
$$r = r(\varphi). \tag{6.3}$$

Krivulji (6.3) pripada tista točka na poltraku $\varphi = \varphi_0$, ki je od izhodišča oddaljena za $r(\varphi_0)$. Običajno zahtevamo, da je $r \geq 0$[1]

Primer 6.1.5.

1. Krožnica s središčem v $(0, 0)$ in polmerom a je (po definiciji) množica točk, ki so za a oddaljene od središča, zato je $r = a$ enačba te krožnice v polarnih koordinatah.

2. Krivuljo, ki jo opisuje enačba $r = 2\cos\varphi$ narišemo tako, da na več poltrakih $\varphi = \varphi_i$ za različne $\varphi_i \in [-\Pi/2, Pi/2]$ odmerimo razdaljo $r = 2\cos\varphi_i$ in povežemo dobljene točke.



Slika 6.7: Krivulja $r = 2\cos\varphi$

Pogled na sliko 6.7 nam pokaže podobnost s krožnico. Prepričajmo se, da je dobljena krivulja res krožnica! Enačbo $r = 2\cos\varphi$ pomnožimo z r in pretvorimo v kartezične koordinate $x^2 + y^2 = 2x$, od koder dobimo značilno enačbo krožnice

[1] V nekaterih, predvsem ameriških učbenikih lahko srečamo drugačen pristop, pri katerem je lahko $r < 0$, ustrezno točko na krivulji nanašamo na poltrak φ v negativno smer, torej v resnici leži na komplementarnem poltraku. Mi se bomo vseskozi držali zahteve $r > 0$.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

■

Krivuljo, dano v polarnih koordinatah z enačbo $r = r(\varphi)$, lahko s pomočjo enačbe (6.1) vedno parametriziramo — parameter je v tem primeru kar polarni kot:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi.$$

6.1.4 Implicitno dane krivulje

Enačba $F(x, y) = 0$ lahko določa krivuljo v ravnini. V tem primeru pravimo, da je krivulja dana *implicitno*. Na primer, z enačbo $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = a^2$ je implicitno dana krožnica s središčem v točki (x_0, y_0) in s polmerom a.

Enačbo tangente na implicitno dano krivuljo v točki (x_0, y_0) dobimo tako, da funkcijsko zvezo $F(x, y) = 0$ odvajamo na x in upoštevamo odvisnost spremenljivke y od spremenljivke x.

Primer 6.1.6. Krivulji, dani z enačbo

$$x^3 + y^3 = 3xy, \tag{6.4}$$

pravimo *Descartesov list*. Zapišimo enačbo tangente v točki $(3/2, 3/2)$ na krivulji.

Z odvajanjem dobimo

$$3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy', \quad y' = \frac{y-x^2}{y^2-x} = -1,$$

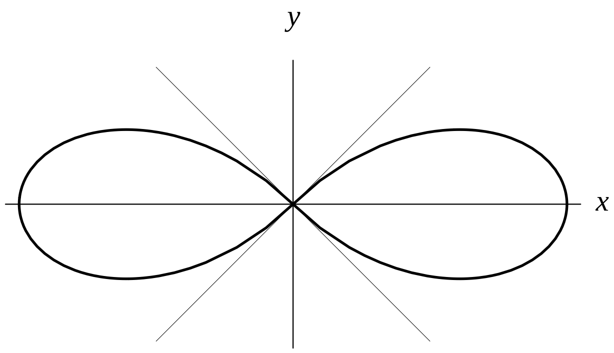
zato je enačba tangente

$$(y-3/2) = -(x-3/2) \quad \text{oziroma} \quad y = -x+3.$$

■

Pogosto implicitno dano krivuljo laže narišemo tako, da poiščemo kakšno njeno parametrizacijo in jo rišemo v parametrični obliki.

Primer 6.1.7.



Slika 6.8: Lemniskata

1. *Lemniskato* $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ najlaže narišemo v polarnih koordinatah (slika 6.8):

$$r^2 = \cos 2\varphi.$$

2. Narišimo Descartesov list (prepričaj se, da je to ista krivulja kot (6.4), slika 6.9):

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Izhodišče je samopresečišče, poševna asimptota je premica $x+y=-1$.

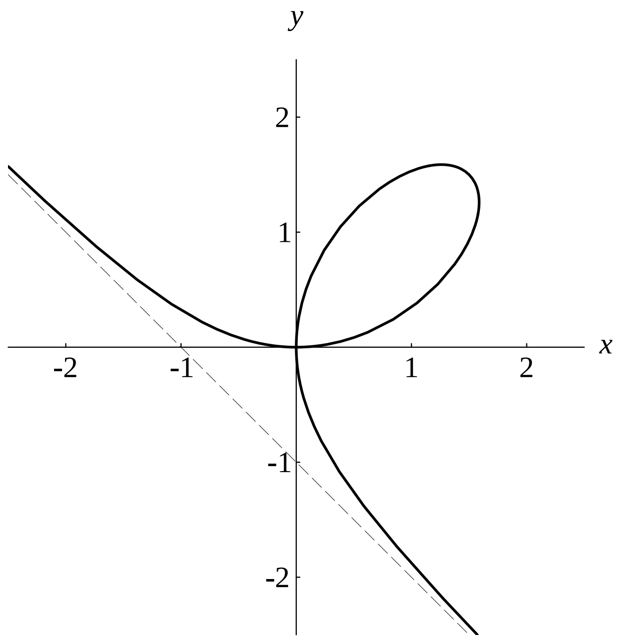
■

Premiki koordinatnega sistema. Pogosto lahko enačbo krivulje poenostavimo s *togim premikom* koordinatnega sistema. Vsak togi premik koordinatnega sistema (tj. premik, ki ohranja medsebojne razdalje med točkami) lahko zapišemo kot kombinacijo zasuka in paralelnega premika.

Paralelni premik koordinatnega sistema dosežemo tako, da vpeljemo nove koordinate (X, Y) z enačbama

$$X = x - a, \quad Y = y - b.$$

Koordinatno izhodišče novega sistema ima v starem sistemu koordinate (a, b).



Slika 6.9: Descartesov list

Primer 6.1.8. Parabolo $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ preprosteje opišemo v koordinatnem sistemu, ki ima izhodišče v njenem temenu, s koordinatami

$$X = x - 1, \quad Y = y + 4, \quad \text{torej} \quad Y = X^2.$$

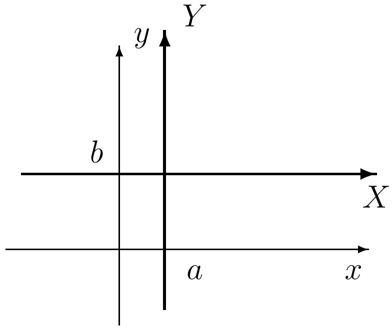
■

Zasuk ali *vrtenje* koordinatnega sistema za kot α najlaže opišemo s polarnimi koordinatami. Točka

$$T(x, y) = T(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

se v zasukanem koordinatnem sistemu izraža s koordinatama

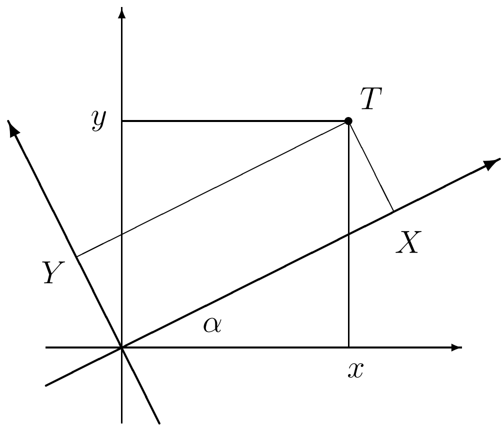
$$\begin{aligned} X &= r\cos(\varphi - \alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha \\ &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y &= r\sin(\varphi - \alpha) = r\sin\varphi\cos\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha \\ &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}$$



Slika 6.10: Premik koordinatnega sistema

stare pa se z novimi izražajo z

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \tag{6.5}$$

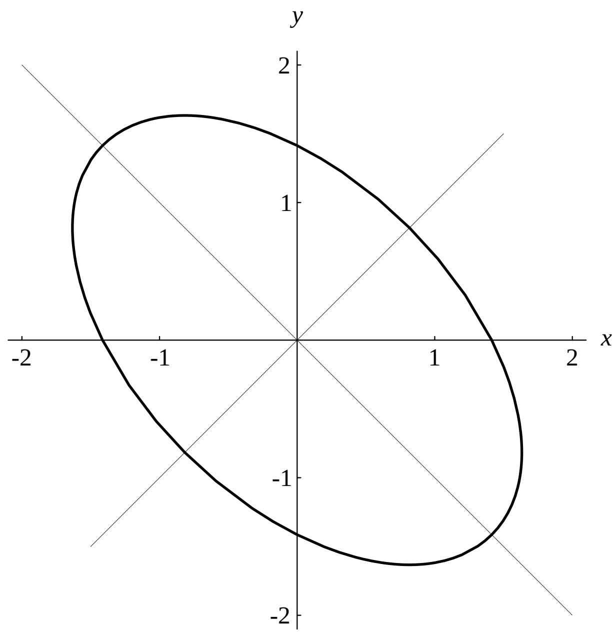


Slika 6.11: Zasuk koordinatnega sistema za kot α

Primer 6.1.9. S premikom in zasukom koordinatnega sistema lahko vsako enačbo krivulje drugega reda

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

prevedemo na eno od osnovnih oblik $AX^2 + BY^2 = C$, $Y = 2qX^2$ ali $X = 2pY^2$. Poizkusimo z enačbo $x^2 + xy + y^2 = 2$. Mešenega člena se znebimo z



Slika 6.12: Krivulja $x^2 + xy + y^2 = 2$.

ustreznim zasukom, tako da v enačbo vpeljemo nove koordinate s predpisom (6.5) in kot α določimo tako, da bo koeficient pri mešanem členu enak 0:

$$(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + (X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)$$

$$+(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 = 2.$$

Mešani člen je

$$-2XY\cos\alpha\sin\alpha + XY\cos^2\alpha - XY\sin^2\alpha + 2XY\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

$$XY\cos(2\alpha) = 0,$$

od koder je $\alpha = \pi/4$. Enačbo zapišemo v polarnih koordinatah

$$X^2(\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha) + Y^2(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = 2,$$

$$\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 2.$$

Krivulja je elipsa z glavnima osema $\sqrt{3/2}$ in $\sqrt{1/2}$, ki v starem koordinatnem sistemu ležita na premicah $y = x$ in $y = -x$. ■

6.2 Uporaba integralov v ravninski geometriji

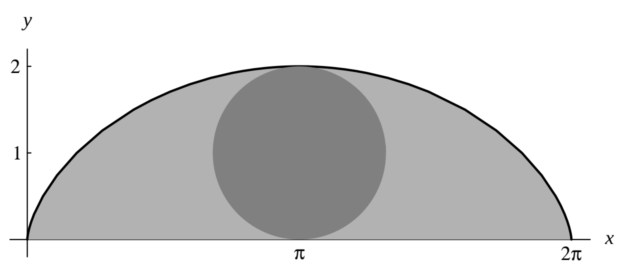
6.2.1 Ploščine krivočrtnih likov

Ploščina krivočrtnega trapeza, omejenega z osjo x, s premicama $x = a$ in $x = b$ in z grafom pozitivne zvezne funkcije $y = f(x)$, je enaka določenemu integralu

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

To velja tudi, če je krivulja, ki omejuje lik zvrha, podana parametrično, s predpisom $x = x(t)$, $y = y(t)$, kjer je $x(t)$ monotona funkcija:

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\,dt, \quad x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b.$$



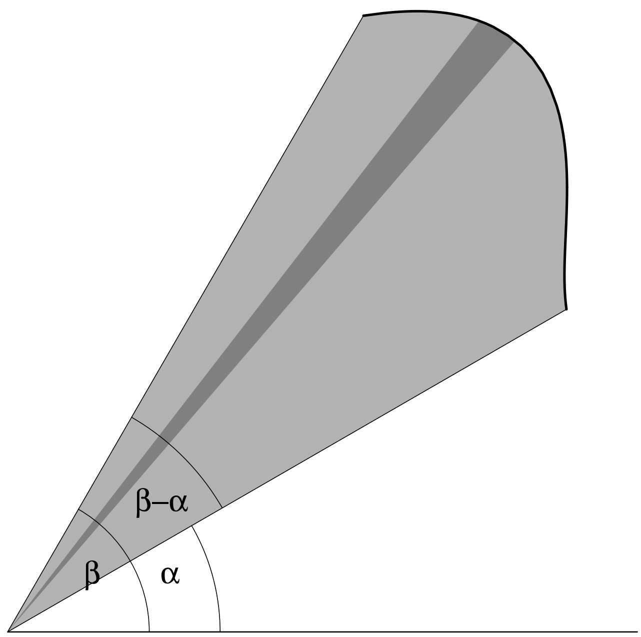
Slika 6.13: Ploščina lika pod cikloido

Primer 6.2.1. Izračunajmo ploščino pod enim lokom cikloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = 3\pi a^2, \end{aligned}$$

Ploščina pod cikloido je torej trikrat večja od ploščine kroga, s kotaljenjem katerega je cikloida nastala. ■



Slika 6.14: Ploščina izseka v polarnih koordinatah

Ploščina krivočrtnega trikotnika, omejenega s poltrakoma $\varphi = \alpha$ in $\varphi = \beta$ in s krivuljo, dano v polarnih koordinatah z zvezno funkcijo $r = r(\varphi)$, se tudi izraža z integralom. Naj bo

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

delitev intervala $[\alpha, \beta]$ in izračunajmo ploščino lika, sestavljenega iz krožnih izsekov ΔS_i nad kotom $\delta_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ s polmerom $r = r(\varphi_i)$. Ploščina posameznega krožnega izseka je

$$\Delta S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \delta_i,$$

ploščina celega lika pa

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \delta_i,$$

kar je integralska vsota za funkcijo $r(\varphi)^2/2$. Če je D_n neko zaporedje delitev intervala $[\alpha, \beta]$, kjer gredo razmiki med delilnimi točkami proti 0, ko $n \to \infty$, konvergirajo intregralske vsote proti določenemu integralu, stopničasti lik pa se čedalje bolje prilega krivočrtenmu trikotniku. V limiti je

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 \, d\varphi.$$

Primer 6.2.2. Izračunajmo ploščino lika, omejenega z lemniskato $r^2 = \cos 2\varphi$ (slika 6.8). Zaradi simetrije je

$$S = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \, d\varphi = [\sin 2\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} = 1.$$

■

Formulo za ploščino krivočrtnega trikotnika v kartezičnih koordinatah dobimo iz zveze

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

torej

$$dx = dr \, \cos \varphi - r \sin \varphi \, d\varphi; \quad dy = dr \, \sin \varphi + r \cos \varphi \, d\varphi.$$

Od tod dobimo

$$\frac{1}{2}r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

in je

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x\dot{y} - y\dot{x})\,d\varphi.$$

Izraz $(x\dot{y} - y\dot{x})\,d\varphi/2$ se imenuje *diferencial ploščine* in je enak ploščini trikotnika $\triangle OTT'$, kjer sta T in T' dve bližnji točki s koordinatama (x, y) in $(x + dx, y + dy)$.

Primer 6.2.3. Izračunajmo ploščino elipse $x = a\cos t$ in $y = b\sin t$. Tukaj je $\dot{x} = -a\sin t\,dt$ in $\dot{y} = b\cos t\,dt$ zato je:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

■

6.2.2 Ločna dolžina

Naj bo $f(x)$ zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$, to je taka funkcija, da je odvod f' zvezena funkcija na tem intervalu. Graf funkcije f je neka krivulja nad intervalom $[a, b]$. Zanima nas, kolikšna je *dolžina loka* te krivulje. Naj bo

$$a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$$

delitev intervala in $T_i = (x_i, f(x_i))$ točka na krivulji, ki leži nad delilno točko x_i. Izračunajmo dolžino s_n lomljene daljice, ki povezuje vse točke T_i na krivulji. Razdalja med dvema zaporednima točkama je:

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Po Lagrangeovem izreku lahko zapišemo

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)\delta_i,$$

torej je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)}\delta_i.$$

To je integralska vsota za zvezno funkcijo $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. in celotna dolžina loka je

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \tag{6.6}$$

Za vsak $x \in [\alpha, \beta]$ je

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

dolžina loka krivulje od točke a do točke x, torej je $s(x)$ naraščajoča, zvezna in odvedljiva funkcija na $[\alpha, \beta]$, njen odvod pa je

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Če to relacijo pomnožimo z dx, dobimo *ločni diferencial* krivulje:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \tag{6.7}$$

če to kvadriramo, pa *kvadrat ločnega diferenciala*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{6.8}$$

Za krivuljo, dano parametrično s predpisoma $x = x(t)$, $y = y(t)$, dobimo ločni diferencial, tako da v izrazu (6.7) upoštevamo odvisnost koordinat od parametra t:

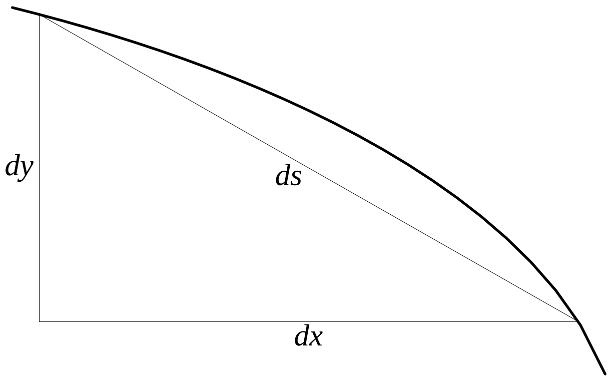
$$ds = \dot{s}\, dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Dolžina loka je integral ločnega diferenciala:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Funkcija

$$s(t) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$



Slika 6.15: Ločni diferencial krivulje

je naraščajoča, torej je injektivna in ima inverzno funkcijo $t = t(s)$. Če to vstavimo v enačbi krvulje,

$$x = x(t(s)), \quad y = y(t(s)),$$

pravimo, da je krivulja parametrizirana z *naravnim parametrom*. Kadar je $x = x(s)$, $y = y(s)$ parametrizacija z naravnim parameterom, je

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

zato je dolžina loka enaka

$$s = \int \alpha^\beta \, ds.$$

Primer 6.2.4.

1. Izračunajmo dolžino loka cikloide

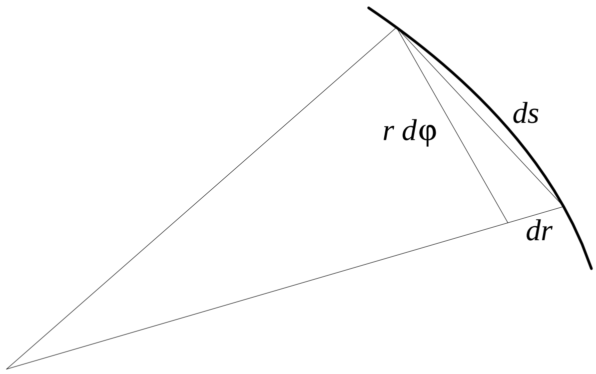
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Ker je

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \quad \dot{y} = a \sin t,$$

je kvadrat ločnega diferenciala

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(2 - 2\cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$



Slika 6.16: Ločni diferencial krivulje v polarnih koordinatah

od tod pa dobimo

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2}\, dt = 4a \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 8a.$$

2. Obseg elipse $x = a\cos t$, $= b\sin t$ je enak

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2 t}\, dt,$$

ta integral pa s substitucijo $\sin t = x$ prevedemo na eliptični integral prve vrste, ki ni elementarna funkcija. Obseg elipse se torej izraža z eliptičnim integralom (od koder je integral tudi dobil svoje ime). ■

Na bo krivulja v polarnih koordinatah dana z enačbo

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Parametrizacija krivulje s kotom φ je:

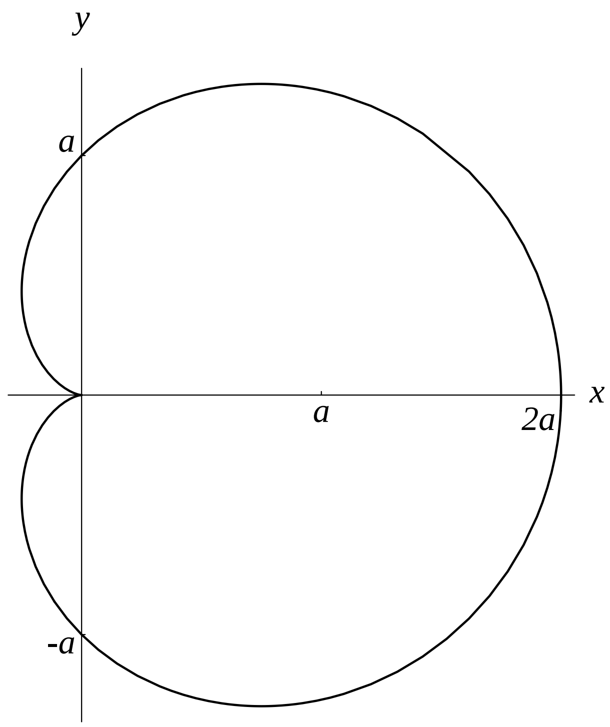
$$x = x(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin(\varphi),$$

torej je kvadrat ločnega diferenciala enak

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left((r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2\right)\, d\varphi \\ &= \left((r')^2 + r^2\right)\, d\varphi = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \end{aligned}$$

Dolžina loka je

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi.$$



Slika 6.17: Kardioida

Primer 6.2.5. Izračunajmo dolžino loka kardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ (Slika 6.17).

Ker je $r' = -a \sin\varphi$, je

$$s = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\varphi}\, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

■

6.2.3 Prostornina geometrijskih teles

Prostornina telesa z znano ploščino prereza Prostornino telesa lahko izračunamo, če znamo izračunati ploščine njegovih vzporednih prerezov. Naj bo telo postavljeno med dve vzporedni ravnini v prostoru, pravokotni na os x, na primer $x = a$ in $x = b$. Prerez telesa pri poljubnem $x \in [a, b]$ je nek lik, njegova ploščina je odvisna od položaja prereza, torej je neka funkcija, označimo jo z $A(x)$. Če poznamo vrednost funkcije $A(x)$ pri vsakem $x \in [a, b]$, lahko odtod izračunamo prostornino telesa.

Naj bo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ neka delitev intervala. Volumen rezine telesa med delilnima točkama x_{i-1} in x_i je približno enak

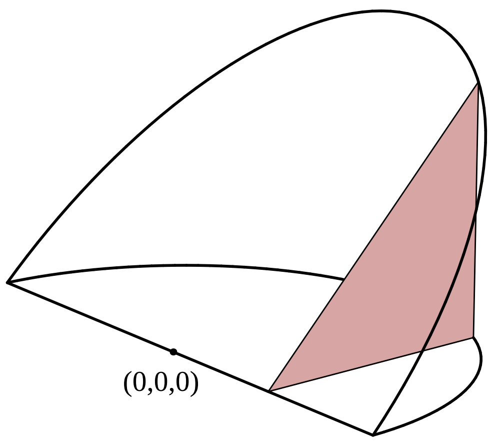
$$\Delta V_i = A(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = A(\xi_i)\delta_i,$$

vsota volumnov vseh teh rezin pa je približek za celotno prostornino

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \delta A(\xi_i)\delta_i.$$

To je kot integralska vsota za funkcijo $A(x)$. Če je $A(x)$ integrabilna funkcija (na primer odsekoma zvezna ali monotona), je volumen enak

$$V = \int_a^b A(x)\, dx. \tag{6.9}$$



Slika 6.18: Prostornina klina

Primer 6.2.6. Izračunajmo volumen klina, ki ga izrežeta iz valja s polmerom a dve ravnini — prva je pravokotna na os valja, druga pa jo seka v premeru valja pod kotom $\pi/4$ (slika 6.18). Koordinatni sistem izberemo tako, da je $-a \leq x \leq a$, osnovna ploskev valja je določena z neenačbama $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ in pri vsakem x je ploščina pravokotnega prereza enaka ploščini enakostraničnega trikotnika

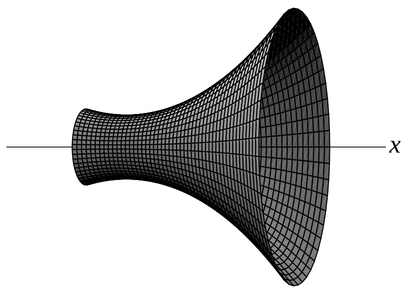
$$A(x) = \frac{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2}{2} = \frac{(a^2 - x^2)}{2}.$$

Volumen klina je zato enak

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\left(a^2 x - x^3/3\right)_{-a}^{a} = 2a^3/3.$$

■

Prostornina rotacijskega telesa Naj bo f zvezna in nenegativna funkcija na intervalu $[a, b]$. Če zavrtimo krivuljo $y = f(x)$ okoli abscisne osi, opiše *rotacijsko ploskev.* Ta ploskev in ravnini, ki v točkah $x = a$ in $x = b$ stojita pravokotno na abscisno os, omejujejo *rotacijsko telo* (slika 6.19).



Slika 6.19: Rotacijsko telo

Ker je ploščina pravokotnega prereza rotacijskega telesa enaka

$$A(x) = \pi(f(x))^2,$$

zato je njegov volumen

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx. \tag{6.10}$$

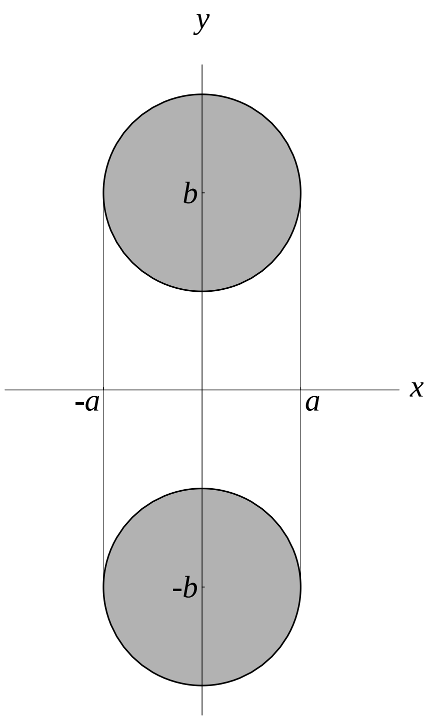
Primer 6.2.7.

1. Izračunajmo prostornino krogle s polmerom a.

   Krogla nastane, ko se okrog osi x zavrti krog $x^2 + y^2 \leq a^2$. Volumen krogle je

   $$V = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

2. Izračunajmo prostornino torusa (slika 6.20), ki nastane, ko krog z radijem a in središčem v točki (a, b), kjer je $a < b$, zavrtimo okoli osi x.



Slika 6.20: Presek torusa

Krožnico lahko obravnavamo kot graf dveh funkcij:

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Prostornina torusa je razlika prostornine telesa, ki ga ob vrtenju opiše zgornja veja, in prostornine telesa, ki ga opiše spodnja veja, torej

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-a}^{a} \left[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2 - (b-\sqrt{a^2-x^2})^2 \right] dx \\
&= 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx == 4\pi a^2 b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\pi^2 a^2 b.
\end{aligned}
$$

■

Če je krivulja dana parametrično z enačbama $x = x(t)$, $y = y(t)$, kjer je $t \in [\alpha, \beta]$, je

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\dot{x}(t)\, dt. \tag{6.11}$$

Primer 6.2.8. Prostornina vrtavke, ki jo dobimo, če asteroido

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

zavrtimo okrog osi x je

$$
\begin{aligned}
V &= 3\pi a^3 \int_{\pi}^{0} \sin^6 t \cos^2 t(-\sin t)\, dt \\
&= -3\pi a^3 \int_{0}^{\pi} (1-\cos^2 t)^3 \cos^2 t\, d(\cos t) \\
&= -3\pi a^3 \int_{1}^{-1} (1-u^2)^3 u^2\, du \\
&= 3\pi a^3 \int_{-1}^{1} (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8)\, du = \frac{32\pi a^3}{105}.
\end{aligned}
$$

■

Volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika pod krivuljo $y = f(x)$, $a \le x \le b$ okrog osi y, moramo izračunati drugače. Naj bo

$$a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$$

delitev intervala $[a, b]$. Z vrtenjem pravokotnika z višino $f(x_i)$ nad intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ dobimo votel valj ali tanko valjno lupino, katere volumen je približno enak

$$\Delta V_i = 2\pi f(x_i)\frac{x_i + x_{i+1}}{2}(x_i - x_{i-1}) = 2\pi f(x_i)\bar{x}_i\delta_i,$$

kjer je $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2$ povprečna vrednost polmera, $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ pa debelina lupine. Z vrtenjem stopničastega lika, sestavljenega iz takšnih pravokotnikov, dobimo stopničasto telo, sestavljeno iz valjnih lupin, katerega volumen je

$$V_n = 2\pi \sum f(x_i)\bar{x}_i\delta_i.$$

Ker je to integralska vsota za funkcijo $2\pi f(x)x$, je iskani volumen enak

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx. \tag{6.12}$$

Primer 6.2.9. Izračunajmo prostornino telesa, ki nastane, če odsek sinusoide $y = \sin x$ med 0 in π zavrtimo okoli ordinatne osi.

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\, dx = 2\pi \left[-x\cos x\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \cos x\, dx = 2\pi^2.$$

■

Volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem krivulje

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

okrog neke splošne osi

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t$$

je enak

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (\rho(t))^2\, dl,$$

kjer je $\rho(t)$ oddaljenost točke na krivulji od osi vrtenja, $dl = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ pa je diferencial loka na osi vrtenja.

6.2.4 Površina rotacijskega telesa

Izračunajmo površino plašča rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ okrog osi x.

Funkcija f naj bo zvezno odvedljiva. Če izberemo delitev intervala

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b,$$

je telo, ki ga pri vrtenju opiše lomljena daljica, ki povezuje posamezne delilne točke na krivulji, sestavljeno iz prisekanih stožcev. Daljica med točkama T_{i-1} in T_i dolžine Δs_i pri tem opiše stožec s plaščem

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \delta_i.$$

Površina celega telesa je tako

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1} + f(x_i)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \delta_i.$$

Če izberemo zaporedje delitev, kjer gredo vse dolžine $\delta_i \to 0$, je limita dobljenega zaporedja (P_n) enaka površini rotacijskega telesa:

$$P = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1} + f(x_i)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \delta_i$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} (2f(\xi_i)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \delta_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{6.13}$$

Primer 6.2.10. Izračunajmo površino telesa, ki nastane, ko krivuljo $y = \operatorname{ch} x$ med $x = -1$ in $x = 2$ zavrtimo okoli abscisne osi.

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = \operatorname{ch} x\, dx; \\
P &= 2\pi \int_{-1}^{2} \operatorname{ch}^2 x\, dx = 2\pi \int_{-1}^{2} \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}\, dx \\
&= \pi \left[x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \right]_{x=-1}^{x=2} = \pi \left(2 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 4 + 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 \right) \\
&= \frac{\pi}{2}(6 + \operatorname{sh} 4 + \operatorname{sh} 2).
\end{aligned}$$

■

Če je krivulja podana v parametrični obliki $x = x(t);\ y = y(t)$, je

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \tag{6.14}$$

Primer 6.2.11. Kardioido $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$, naj zavrtimo okoli abscisne osi. Izračunajmo površino dobljene rotacijske ploskve.

Ker je kvadrat diferenciala loka enak

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 16a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

je iskana površina

$$P = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin 2t) \sin \frac{t}{2}\, dt = \frac{128\pi a^2}{5}.$$

■

6.2.5 Momenti funkcije

Funkcija f naj bo na intervalu $[a, b]$ pozitivna in integrabilna. Integral oblike

$$M_n = \int_a^b x^n f(x)\, dx; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

imenujemo *n-ti moment funkcije.* Momenti M_n sestavljajo neko zaporedje števil, ki je s funkcijo enolično določeno. Velja tudi obratna trditev: dano zaporedje momentov M_n enolično določa funkcijo f.

Primer 6.2.12. Izračunajmo momente konstantne funkcije $f(x) = 1$ na intervalu $[a, b]$.

$$M_n = \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$

■

Oglejmo si fizikalno interpretacijo momentov. Naj bo na intervalu $[a, b]$ porazdeljena masa in naj bo vrednost funkcije $f(x)$ enaka gostoti mase v razdalji x od izhodišča (predstavljajmo si, da na abscisni osi leži palica, ki je neenakomerno debela). Potem imajo prvi trije momenti

$$m = \int_a^b f(x)\,dx, \quad M = \int_a^b xf(x)\,dx, \quad J = \int_a^b x^2 f(x)\,dx$$

fizikalen pomen. Prvi integral (m) je enak masi palice, saj je masa koščka palice z dolžino dx enaka $f(x)\,dx$. Drugi integral je statični moment M, tretji integral pa je vztrajnostni moment palice J.

Če statični moment M delimo z maso m, dobimo absciso x_0 težišča palice

$$mx_0 = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

Z drugačno interpretacijo momentov se bomo srečali pri verjetnostnem računu.

Literatura

[1] K. G. Binmore: *Mathematical Analysis (a straightforeward approach), 2 ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[2] C. H. Edwards Jr. in D. E. Penney: *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, 1990.

[3] R. Jamnik: *Matematika*, Partizanska knjiga, Ljubljana, 1981.

[4] P. Lax, S. Burstein in A. Lax: *Calculus with Applications and Computing, Vol I*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[5] N. Piskunov: *Differential and Integral Calculus, vol. I*, Mir Publishers, Moscow, 1974.

[6] N. Prijatelj: *Uvod v matematično analizo, 1. del*, DMFA, Ljubljana, 1980.

[7] G. B. Thomas, Jr: *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1972.

[8] I. Vidav: *Višja matematika I* (10. natis), DMFA, Ljubljana, 1990.

Stvarno kazalo