Poglavje 6

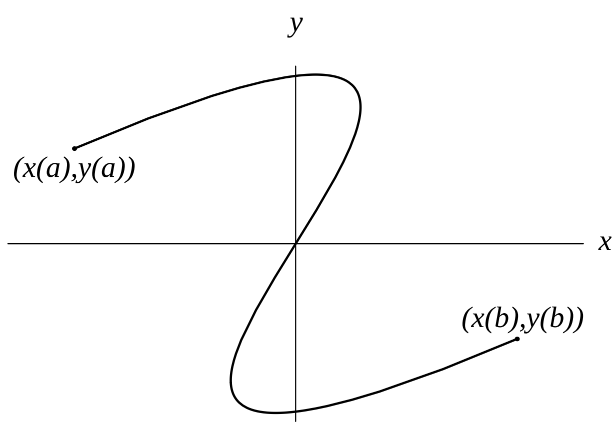
Krivulje v ravnini

6.1 Risanje krivulj

Krivulja v ravnini je zvezna preslikava

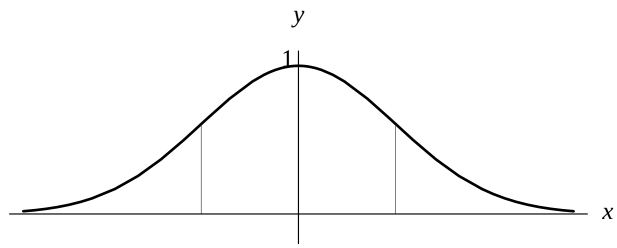
$$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2,$$

ki vsaki točki $t \in [\alpha, \beta]$ priredi neko točko $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.



Slika 6.1: Krivulja v ravnini

Točki $(x(a), y(a))$ in $(x(b), y(b))$ imenujemo krajišči ali robni točki krivulje. Če se ujemata, torej če je $x(a) = x(b)$ in $y(a) = y(b)$, je krivulja *sklenjena*. Točka, ki jo dobimo pri dveh različnih vrednostih $t_1 \neq t_2 \in [a, b]$ je *samopresečišče* krivulje ali *dvojna točka*. Vsaka sklenjena krivulja ima



Slika 6.2: Krivulja, dana eksplicitno z enačbo $y = e^{-x^2}$.

vsaj eno samopresečišče: točko $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$. Če je to edino samopresečišče, je krivulja *enostavna sklenjena*.

Krivuljo v ravnini lahko opišemo na več načinov, ki jih bomo na kratko opisali v nadaljevanju.

6.1.1 Eksplicitni opis krivulje.

Krivulja je lahko dana kot graf neke funkcije $y = f(x)$. V tem primeru vsakemu številu $x \in D_f$ pripada natanko ena točka $(x, f(x))$ na krivulji. Krivulja, ki je opisana eksplicitno s funkcijo f seka vsako navpično premico v največ eni točki.

Primer 6.1.1. Krivulji, ki je graf funkcije $f(x) = e^{-x^2}$ pravimo *Gaussova krivulja.* Naštejmo nekaj njenih lastnosti:

1. Je simetrična glede na os y, ker je f soda funkcija.

2. Ima vodoravno asimptoto $y = 0$, ker je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

3. Odvod $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ je pozitiven za $x < 0$, tu funkcija narašča, in negativen za $x > 0$, tu funkcija pada. V kritični točki $x = 0$ je zato maksimum.

4. Drugi odvod $f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ je pozitiven za $|x| > 1/\sqrt{2}$, funkcija je tu konveksna, in negativen za $|x| < 1/\sqrt{2}$, funkcija je tu konkavna. Točki $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sta prevoja.

■

Krivulja je lahko dana tudi eksplicitno z enačbo $x = g(y)$. Taka krivulja seka vodoravne premice v največ eni točki.

Primer 6.1.2. Narišimo še krivuljo $x = e^{\operatorname{tg} y}$.

Slika 6.3: Krivulja, dana z enačbo $x = e^{\operatorname{tg} y}$.

6.1.2 Parametričen opis krivulje

Krivulja je opisana *parametrično* s funkcijama $x = x(t)$ in $y = y(t)$, $t \in [a, b]$. Predpisu

$$t \to (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

pravimo *parametrizacija* krivulje, spremenljivki t pa parameter.

Primer 6.1.3.

1. S predpisom

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   je dan parametričen opis krožnice s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in s polmerom a. Ko parameter t teče od 0 proti 2π, se točka na krožnici giblje od točke $(1, 0)$ v pozitivni smeri, tj. v smeri nasprotni smeri urinega kazalca. Krožnica je primer enostavne sklenjene krivulje.

   Tudi predpis

$$x = a\sin t, \quad y = a\cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   je parametrizacija iste krožnice, le da je začetna točka v tem primeru $(0, 1)$ in smer gibanja nasprotna kot prej.

2. Predpis

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   določa elipso s središčem v izhodišču koordinatnega sistema in z glavnima osema a in b, saj je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Krivulja, dana z

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R},$$

je hiperbola

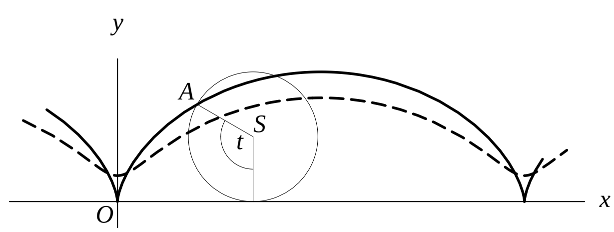
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

■

Krivulja v ravnini še zdaleč nima ene same parametrizacije — krožnico $x^2 + y^2 = a^2$ smo parametrizirali že na dva načina. Različnih parametričnih opisov dane krivulje je zelo veliko.

Oglejmo si še nekaj značilnih parametrično danih krivulj.

Cikloida je krivulja, ki jo opiše točka A na krožnici, ki se kotali po osi x. Zapišimo enačbo cikloide v parametrični obliki, parameter t pa naj bo kot zasuka krožnice glede na začetno lego, ki je izbrana tako, da je središče krožnice v točki $(0, a)$, točka A pa v koordinatnem izhodišču (glej sliko 6.4).



Slika 6.4: Cikloida in trohoida

Ko se krožnica zavrti za kot t, se njeno središče premakne v točko (at, a), točka A pa se zavrti okrog središča kroga, tako da so njene nove koordinate

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

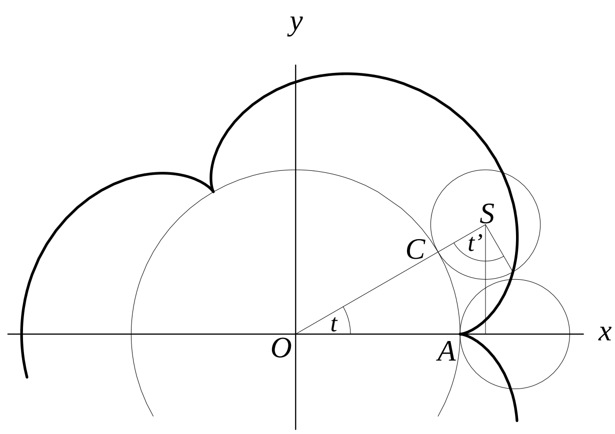
Ko krožnica naredi en cel obrat, opiše točka A eno vejo cikloide in se spet dotakne osi x, razlika med dvema dotikališčema je 2π.

Trohoida Nalogo lahko posplošimo — opišimo gibanje točke v notranjosti kroga, ki je oddaljena od središča za $b < a$. Krivulji, ki jo taka točka opiše, pravimo *trohoida*, njena parametrizacija je:

$$x = at - b\sin t, \quad y = a - b\cos t.$$

Cikloida je seveda poseben primer trohoide.

Epicikloida Nalogo pa lahko posplošimo tudi v drugo smer. Namesto po osi x (tj. po premici) se lahko krožnica kotali pa kakšni drugi krivulji. Če se kotali po zunanji strani druge krožnice, pravimo krivulji, ki jo opiše točka A na krožnici, *epicikloida*.

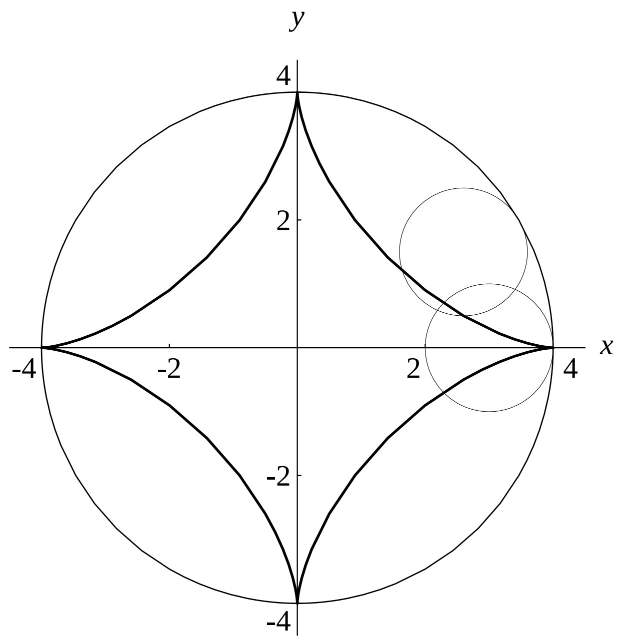


Slika 6.5: Epicikloida

Polmer fiksne krožnice naj bo b, polmer kotaleče se pa a. Kadar je razmerje b/a celo število, bo po enem obhodu točka A spet v točki izhodiščni točki. Epicikloida je v tem primeru enostavno sklenjena krivulja. Če je $b/a = p/q$ racionalno število (p/q je okrajšan ulomek), se bo točka A vrnila v izhodiščno točko po q obhodih. Epicikloida bo v tem primeru sklenjena, vendar bo imela samopresečišča. Če pa je b/a iracionalno število, se točka A ne bo nikoli več vrnila v izhodiščno točko in epicikloida v tem primeru ne bo sklenjena krivulja.

Najenostvnejšo epicikloido dobimo takrat, ko imata krožnici enaka polmera $a = b$. Tedaj se točka A vrne v začetno lego po enem obhodu in epicikloida ima eno samo vejo. Taki epicikloidi pravimo, zaradi njene oblike, *srčnica* ali *kardioida*.

Hipocikloida Če se krožnica kotali po notranji strani fiksne krožnice (ki mora v tem primeru biti večja od prve), dobimo krivuljo, ki ji pravimo *hipocikloida*.



Slika 6.6: Astroida

Tudi hipocikloida je enostavna sklenjena krivulja, če je razmerje b/a celo število. Hipocikolida z razmerje $b/a = 2$ je premer kroga (ki ga točka opiše dvakrat, da dobimo sklenjeno krivuljo). Hipocikloidi z razmerjem $b/a = 4$ pravimo *astroida*. Njena enačba v parametrični obliki je

$$x = 4a\cos^3 t, \quad y = 4a\sin^3 t.$$

Parametrizaciji epicikloide in hipocikloide sta izpeljani v [8].

Tangenta na parametrično dano krivuljo Krivulja, dana v parametrični obliki z $x = x(t)$, $y = y(t)$, je *gladka*, če sta odvoda $\dot{x}(t)$ in $\dot{y}(t)$ zvezni funkciji, ki nimata pri nobenem t obe hkrati vrednost 0. Če je v neki točki t_0 odvod $\dot{x} = \dot{x}(t) \neq 0$, je v okolici točke t_0 funkcija $x(t)$ monotona, tako da obstaja inverzna funkcija $t = t(x)$ in y se z x izraža eksplicitno:

$$y = y(t(x)).$$

Izračunajmo odvod:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dx}{dx/dt} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Od tod sledi, da obstaja tangenta na krivuljo v točki t_0, njena enačba je:

$$y - y(t_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x(t_0)).$$

V okolici točke, kjer je $\dot{x}(t_0) = 0$ in $y(\dot{t_0}) \neq 0$, pa je funkcija y monotona in je $x = x(t(y))$. Odvod je

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = 0,$$

tangenta je v takih točkah navpična.

Primer 6.1.4.

1. Zapišimo enačbo tangente na cikloido v točki $x_0 = a(t_0 - \sin t_0)$, $y_0 = a(1 - \cos t_0)$.

   Smerni koeficient tangente je

   $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t_0}{1 - \cos t_0},$$

   zato je enačba tangente

   $$y = \frac{\sin t_0}{1 - \cos t_0}(x - x_0) + y_0.$$

2. Dokažimo: odsek na tangenti na astroido, ki ga odrežeta koordinatni osi, je v vseh točkah astroide enak.

   Smerni koeficient tangente je

   $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{12a \sin^2 t \cos t}{-12a \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tg} t,$$

   od koder dobimo enačbo tangente

   $$y - 4a \sin^3 t = -\operatorname{tg} t(x - 4a \cos^3 t),$$

ki jo pomnožimo s $\cos t$ in preuredimo

$$y\cos t + x\sin t = 2a\sin t\cos t.$$

Tako sta presečišči tangente z abscisno in ordinatno osjo

$$a_x = 2a\cos t \quad \text{in} \quad a_y = 2a\sin t,$$

razdalja med točkama $(2a\cos t, 0)$ in $(0, 2a\sin t)$ pa je

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2a,$$

neodvisno od t. ■

6.1.3 Krivulje v polarnem koordinatnem sistemu

Polarni koordinatni sistem v ravnini je določen z izbiro točke, ki predstavlja koordinatno izhodišče O, in poltraka z začetkom v izhodišču, ki predstavlja polarno os. Točka v ravnini je v tem koordinatnem sistemu določena s *polarnim radijem* r, ki je oddaljenost točke od izhodišča, in s *polarnim kotom* φ, ki ga daljica med točko in koordinatnim izhodiščem oklepa s polarno osjo. Če je v ravnini že izbran kartezični koordinatni sistem, običajno koordinatno izhodišče polarnega in kartezičnega koordinatnega sistema sovpadata, polarna os pa je na pozitivnem delu osi x. V tem primeru se kartezične koordinate izražajo s polarnimi z:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{6.1}$$

polarne s kartezičnimi pa z:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{6.2}$$

Krivulja v polarnem koordinatnem sistemu je določena s funkcijo

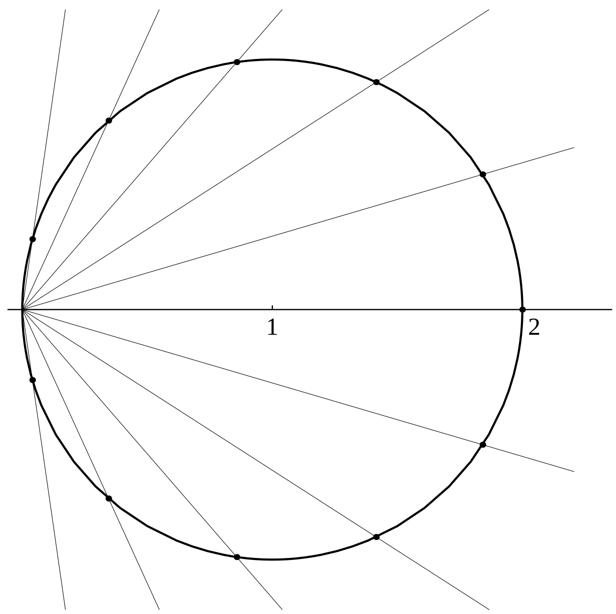
$$r = r(\varphi). \tag{6.3}$$

Krivulji (6.3) pripada tista točka na poltraku $\varphi = \varphi_0$, ki je od izhodišča oddaljena za $r(\varphi_0)$. Običajno zahtevamo, da je $r \geq 0$[1]

Primer 6.1.5.

1. Krožnica s središčem v $(0, 0)$ in polmerom a je (po definiciji) množica točk, ki so za a oddaljene od središča, zato je $r = a$ enačba te krožnice v polarnih koordinatah.

2. Krivuljo, ki jo opisuje enačba $r = 2\cos\varphi$ narišemo tako, da na več poltrakih $\varphi = \varphi_i$ za različne $\varphi_i \in [-\Pi/2, Pi/2]$ odmerimo razdaljo $r = 2\cos\varphi_i$ in povežemo dobljene točke.



Slika 6.7: Krivulja $r = 2\cos\varphi$

Pogled na sliko 6.7 nam pokaže podobnost s krožnico. Prepričajmo se, da je dobljena krivulja res krožnica! Enačbo $r = 2\cos\varphi$ pomnožimo z r in pretvorimo v kartezične koordinate $x^2 + y^2 = 2x$, od koder dobimo značilno enačbo krožnice

[1] V nekaterih, predvsem ameriških učbenikih lahko srečamo drugačen pristop, pri katerem je lahko $r < 0$, ustrezno točko na krivulji nanašamo na poltrak φ v negativno smer, torej v resnici leži na komplementarnem poltraku. Mi se bomo vseskozi držali zahteve $r > 0$.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

■

Krivuljo, dano v polarnih koordinatah z enačbo $r = r(\varphi)$, lahko s pomočjo enačbe (6.1) vedno parametriziramo — parameter je v tem primeru kar polarni kot:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi.$$

6.1.4 Implicitno dane krivulje

Enačba $F(x, y) = 0$ lahko določa krivuljo v ravnini. V tem primeru pravimo, da je krivulja dana *implicitno*. Na primer, z enačbo $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = a^2$ je implicitno dana krožnica s središčem v točki (x_0, y_0) in s polmerom a.

Enačbo tangente na implicitno dano krivuljo v točki (x_0, y_0) dobimo tako, da funkcijsko zvezo $F(x, y) = 0$ odvajamo na x in upoštevamo odvisnost spremenljivke y od spremenljivke x.

Primer 6.1.6. Krivulji, dani z enačbo

$$x^3 + y^3 = 3xy, \tag{6.4}$$

pravimo *Descartesov list.* Zapišimo enačbo tangente v točki $(3/2, 3/2)$ na krivulji.

Z odvajanjem dobimo

$$3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy', \quad y' = \frac{y-x^2}{y^2-x} = -1,$$

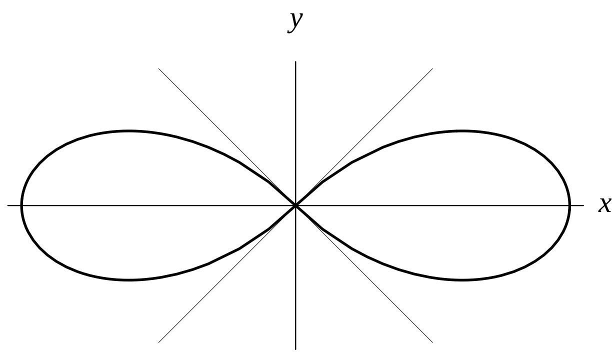
zato je enačba tangente

$$(y - 3/2) = -(x - 3/2) \quad \text{oziroma} \quad y = -x + 3.$$

■

Pogosto implicitno dano krivuljo laže narišemo tako, da poiščemo kakšno njeno parametrizacijo in jo rišemo v parametrični obliki.

Primer 6.1.7.



Slika 6.8: Lemniskata

1. *Lemniskato* $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ najlaže narišemo v polarnih koordinatah (slika 6.8):

$$r^2 = \cos 2\varphi.$$

2. Narišimo Descartesov list (prepričaj se, da je to ista krivulja kot (6.4), slika 6.9):

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

   Izhodišče je samopresečišče, poševna asimptota je premica $x + y = -1$.

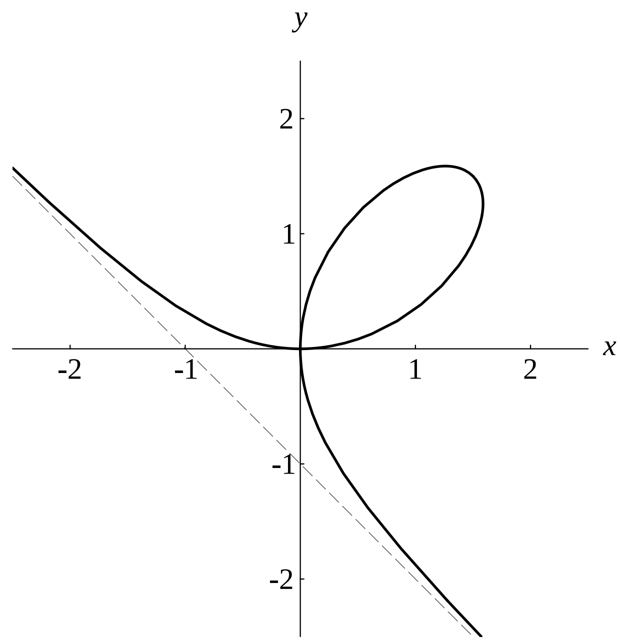
■

Premiki koordinatnega sistema. Pogosto lahko enačbo krivulje poenostavimo s *togim premikom* koordinatnega sistema. Vsak togi premik koordinatnega sistema (tj. premik, ki ohranja medsebojne razdalje med točkami) lahko zapišemo kot kombinacijo zasuka in paralelnega premika.

Paralelni premik koordinatnega sistema dosežemo tako, da vpeljemo nove koordinate (X, Y) z enačbama

$$X = x - a, \quad Y = y - b.$$

Koordinatno izhodišče novega sistema ima v starem sistemu koordinate (a, b).



Slika 6.9: Descartesov list

Primer 6.1.8. Parabolo $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ preprosteje opišemo v koordinatnem sistemu, ki ima izhodišče v njenem temenu, s koordinatami

$$X = x - 1, \quad Y = y + 4, \quad \text{torej} \quad Y = X^2.$$

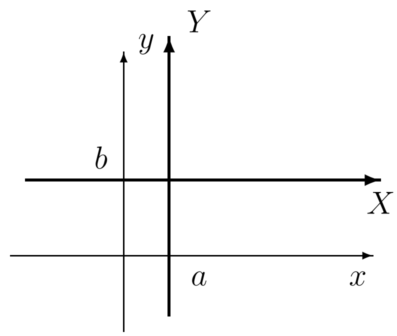
■

Zasuk ali *vrtenje* koordinatnega sistema za kot α najlaže opišemo s polarnimi koordinatami. Točka

$$T(x, y) = T(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

se v zasukanem koordinatnem sistemu izraža s koordinatama

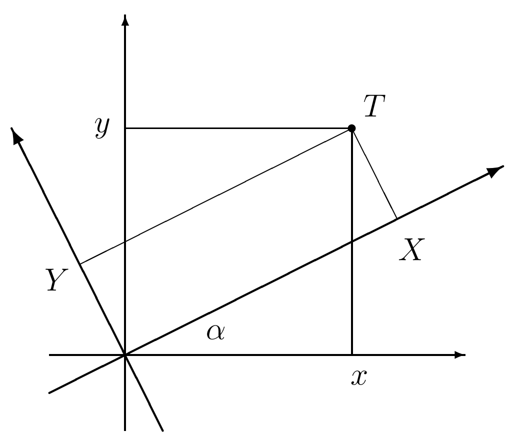
$$\begin{aligned} X &= r\cos(\varphi - \alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha \\ &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ Y &= r\sin(\varphi - \alpha) = r\sin\varphi\cos\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha \\ &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}$$



Slika 6.10: Premik koordinatnega sistema

stare pa se z novimi izražajo z

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \tag{6.5}$$

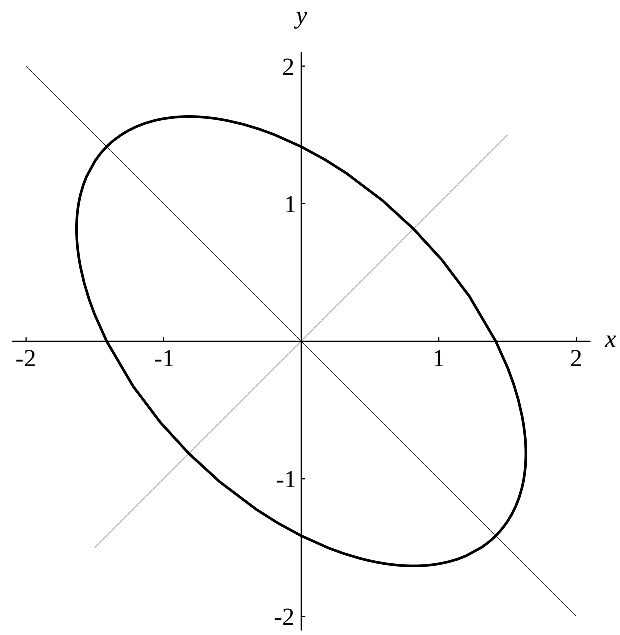


Slika 6.11: Zasuk koordinatnega sistema za kot α

Primer 6.1.9. S premikom in zasukom koordinatnega sistema lahko vsako enačbo krivulje drugega reda

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

prevedemo na eno od osnovnih oblik $AX^2 + BY^2 = C$, $Y = 2qX^2$ ali $X = 2pY^2$. Poizkusimo z enačbo $x^2 + xy + y^2 = 2$. Mešenega člena se znebimo z



Slika 6.12: Krivulja $x^2 + xy + y^2 = 2$.

ustreznim zasukom, tako da v enačbo vpeljemo nove koordinate s predpisom (6.5) in kot α določimo tako, da bo koeficient pri mešanem členu enak 0:

$$(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + (X\cos\alpha - Y\sin\alpha)(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)$$

$$+(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)^2 = 2.$$

Mešani člen je

$$-2XY\cos\alpha\sin\alpha + XY\cos^2\alpha - XY\sin^2\alpha + 2XY\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

$$XY\cos(2\alpha) = 0,$$

od koder je $\alpha = \pi/4$. Enačbo zapišemo v polarnih koordinatah

$$X^2(\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha) + Y^2(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = 2,$$

$$\frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 2.$$

Krivulja je elipsa z glavnima osema $\sqrt{3/2}$ in $\sqrt{1/2}$, ki v starem koordinatnem sistemu ležita na premicah $y = x$ in $y = -x$. ■

6.2 Uporaba integralov v ravninski geometriji

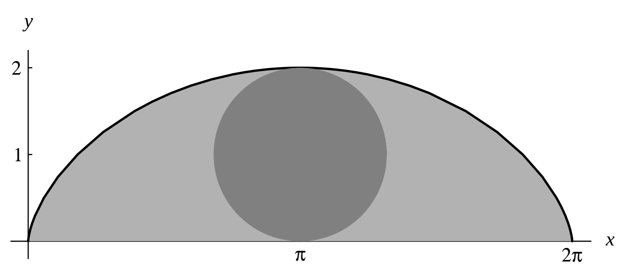
6.2.1 Ploščine krivočrtnih likov

Ploščina krivočrtnega trapeza, omejenega z osjo x, s premicama $x = a$ in $x = b$ in z grafom pozitivne zvezne funkcije $y = f(x)$, je enaka določenemu integralu

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

To velja tudi, če je krivulja, ki omejuje lik zvrha, podana parametrično, s predpisom $x = x(t)$, $y = y(t)$, kjer je $x(t)$ monotona funkcija:

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y(t)\dot{x}(t)\,dt, \quad x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b.$$



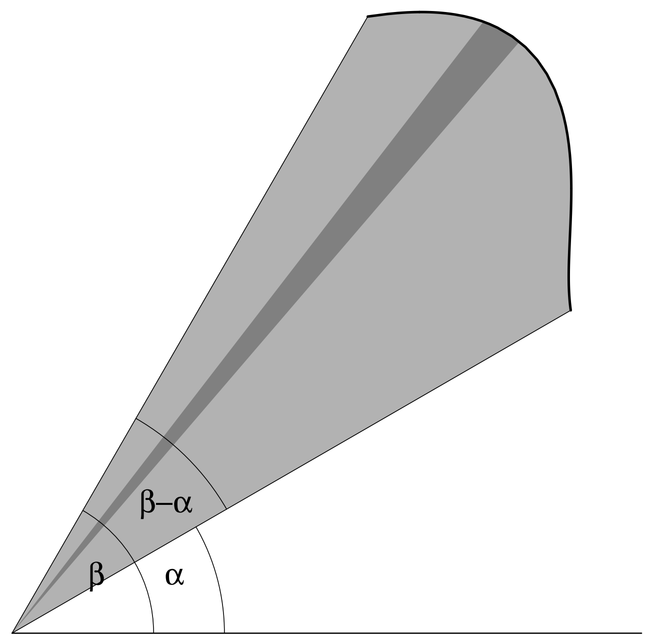
Slika 6.13: Ploščina lika pod cikloido

Primer 6.2.1. Izračunajmo ploščino pod enim lokom cikloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = 3\pi a^2, \end{aligned}$$

Ploščina pod cikloido je torej trikrat večja od ploščine kroga, s kotaljenjem katerega je cikloida nastala. ■



Slika 6.14: Ploščina izseka v polarnih koordinatah

Ploščina krivočrtnega trikotnika, omejenega s poltrakoma $\varphi = \alpha$ in $\varphi = \beta$ in s krivuljo, dano v polarnih koordinatah z zvezno funkcijo $r = r(\varphi)$, se tudi izraža z integralom. Naj bo

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$$

delitev intervala $[\alpha, \beta]$ in izračunajmo ploščino lika, sestavljenega iz krožnih izsekov ΔS_i nad kotom $\delta_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ s polmerom $r = r(\varphi_i)$. Ploščina posameznega krožnega izseka je

$$\Delta S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \delta_i,$$

ploščina celega lika pa

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \delta_i,$$

kar je integralska vsota za funkcijo $r(\varphi)^2/2$. Če je D_n neko zaporedje delitev intervala $[\alpha, \beta]$, kjer gredo razmiki med delilnimi točkami proti 0, ko $n \to \infty$, konvergirajo intregralske vsote proti določenemu integralu, stopničasti lik pa se čedalje bolje prilega krivočrtenmu trikotniku. V limiti je

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 \, d\varphi.$$

Primer 6.2.2. Izračunajmo ploščino lika, omejenega z lemniskato $r^2 = \cos 2\varphi$ (slika 6.8). Zaradi simetrije je

$$S = 2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \, d\varphi = [\sin 2\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} = 1.$$

■

Formulo za ploščino krivočrtnega trikotnika v kartezičnih koordinatah dobimo iz zveze

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

torej

$$dx = dr \, \cos \varphi - r \sin \varphi \, d\varphi; \quad dy = dr \, \sin \varphi + r \cos \varphi \, d\varphi.$$

Od tod dobimo

$$\frac{1}{2}r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx),$$

in je

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x\dot{y} - y\dot{x})\,d\varphi.$$

Izraz $(x\dot{y} - y\dot{x})\,d\varphi/2$ se imenuje *diferencial ploščine* in je enak ploščini trikotnika $\triangle OTT'$, kjer sta T in T' dve bližnji točki s koordinatama (x, y) in $(x + dx, y + dy)$.

Primer 6.2.3. Izračunajmo ploščino elipse $x = a\cos t$ in $y = b\sin t$. Tukaj je $\dot{x} = -a\sin t\,dt$ in $\dot{y} = b\cos t\,dt$ zato je:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

■

6.2.2 Ločna dolžina

Naj bo $f(x)$ zvezno odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$, to je taka funkcija, da je odvod f' zvezena funkcija na tem intervalu. Graf funkcije f je neka krivulja nad intervalom $[a, b]$. Zanima nas, kolikšna je *dolžina loka* te krivulje. Naj bo

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$$

delitev intervala in $T_i = (x_i, f(x_i))$ točka na krivulji, ki leži nad delilno točko x_i. Izračunajmo dolžino s_n lomljene daljice, ki povezuje vse točke T_i na krivulji. Razdalja med dvema zaporednima točkama je:

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Po Lagrangeovem izreku lahko zapišemo

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(\xi_i)\delta_i,$$

torej je

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)}\delta_i.$$

To je integralska vsota za zvezno funkcijo $\sqrt{1+(f'(x))^2}$. in celotna dolžina loka je

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \tag{6.6}$$

Za vsak $x \in [\alpha, \beta]$ je

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

dolžina loka krivulje od točke a do točke x, torej je $s(x)$ naraščajoča, zvezna in odvedljiva funkcija na $[\alpha, \beta]$, njen odvod pa je

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}.$$

Če to relacijo pomnožimo z dx, dobimo *ločni diferencial* krivulje:

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{dx^2+dy^2}, \tag{6.7}$$

če to kvadriramo, pa *kvadrat ločnega diferenciala*

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{6.8}$$

Za krivuljo, dano parametrično s predpisoma $x = x(t)$, $y = y(t)$, dobimo ločni diferencial, tako da v izrazu (6.7) upoštevamo odvisnost koordinat od parametra t:

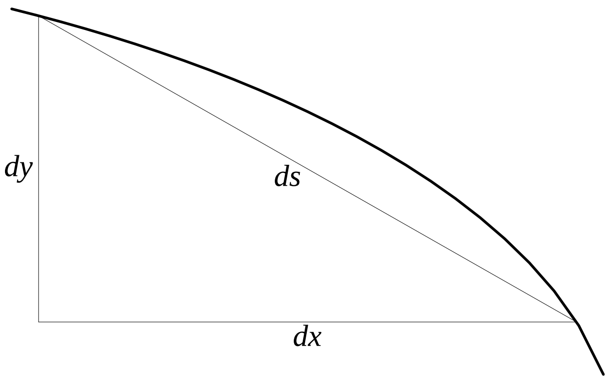
$$ds = \dot{s}\,dt = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Dolžina loka je integral ločnega diferenciala:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt.$$

Funkcija

$$s(t) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$



Slika 6.15: Ločni diferencial krivulje

je naraščajoča, torej je injektivna in ima inverzno funkcijo $t = t(s)$. Če to vstavimo v enačbi krvulje,

$$x = x(t(s)), \quad y = y(t(s)),$$

pravimo, da je krivulja parametrizirana z *naravnim parametrom.* Kadar je $x = x(s)$, $y = y(s)$ parametrizacija z naravnim parameterom, je

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

zato je dolžina loka enaka

$$s = \int \alpha^\beta \, ds.$$

Primer 6.2.4.

1. Izračunajmo dolžino loka cikloide

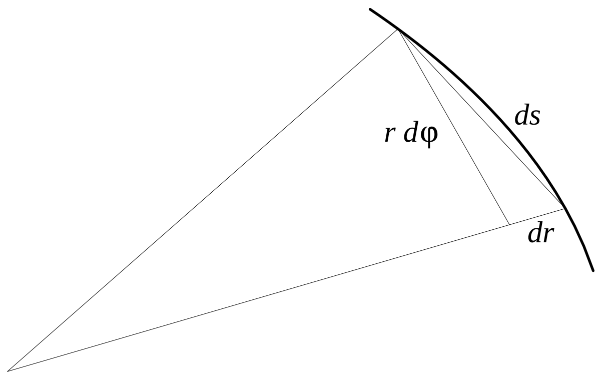
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Ker je

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \quad \dot{y} = a \sin t,$$

je kvadrat ločnega diferenciala

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(2 - 2\cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$



Slika 6.16: Ločni diferencial krivulje v polarnih koordinatah

od tod pa dobimo

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\, dt = 4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 8a.$$

2. Obseg elipse $x = a\cos t, = b\sin t$ je enak

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2 t}\, dt,$$

ta integral pa s substitucijo $\sin t = x$ prevedemo na eliptični integral prve vrste, ki ni elementarna funkcija. Obseg elipse se torej izraža z eliptičnim integralom (od koder je integral tudi dobil svoje ime). ■

Na bo krivulja v polarnih koordinatah dana z enačbo

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Parametrizacija krivulje s kotom φ je:

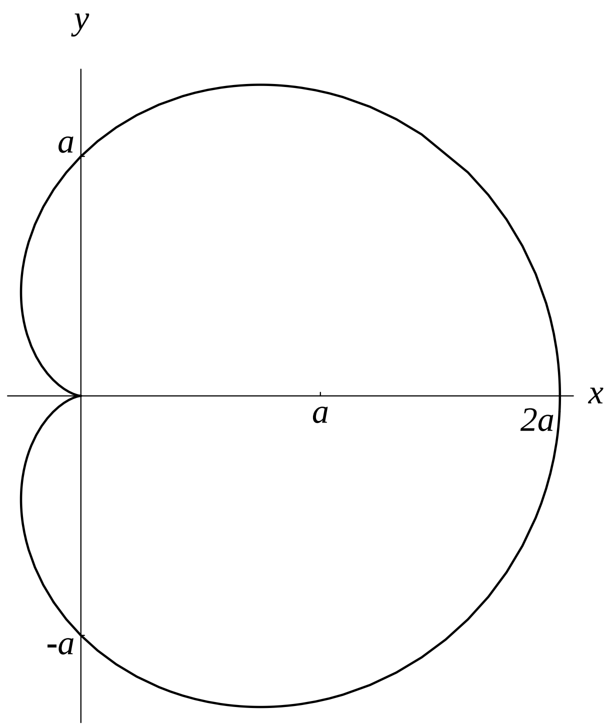
$$x = x(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin(\varphi),$$

torej je kvadrat ločnega diferenciala enak

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left((r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2\right)\, d\varphi \\ &= \left((r')^2 + r^2\right)\, d\varphi = dr^2 + r^2 d\varphi^2. \end{aligned}$$

Dolžina loka je

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi.$$



Slika 6.17: Kardioida

Primer 6.2.5. Izračunajmo dolžino loka kardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ (Slika 6.17).

Ker je $r' = -a\sin\varphi$, je

$$s = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos\varphi}\, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a.$$

■

6.2.3 Prostornina geometrijskih teles

Prostornina telesa z znano ploščino prereza Prostornino telesa lahko izračunamo, če znamo izračunati ploščine njegovih vzporednih prerezov. Naj bo telo postavljeno med dve vzporedni ravnini v prostoru, pravokotni na os x, na primer $x = a$ in $x = b$. Prerez telesa pri poljubnem $x \in [a, b]$ je nek lik, njegova ploščina je odvisna od položaja prereza, torej je neka funkcija, označimo jo z $A(x)$. Če poznamo vrednost funkcije $A(x)$ pri vsakem $x \in [a, b]$, lahko odtod izračunamo prostornino telesa.

Naj bo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ neka delitev intervala. Volumen rezine telesa med delilnima točkama x_{i-1} in x_i je približno enak

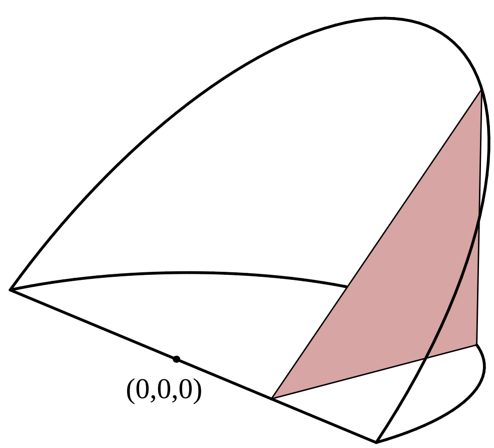
$$\Delta V_i = A(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = A(\xi_i)\delta_i,$$

vsota volumnov vseh teh rezin pa je približek za celotno prostornino

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \delta A(\xi_i)\delta_i.$$

To je kot integralska vsota za funkcijo $A(x)$. Če je $A(x)$ integrabilna funkcija (na primer odsekoma zvezna ali monotona), je volumen enak

$$V = \int_a^b A(x)\, dx. \tag{6.9}$$



Slika 6.18: Prostornina klina

Primer 6.2.6. Izračunajmo volumen klina, ki ga izrežeta iz valja s polmerom a dve ravnini — prva je pravokotna na os valja, druga pa jo seka v premeru valja pod kotom $\pi/4$ (slika 6.18). Koordinatni sistem izberemo tako, da je $-a \leq x \leq a$, osnovna ploskev valja je določena z neenačbama $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ in pri vsakem x je ploščina pravokotnega prereza enaka ploščini enakostraničnega trikotnika

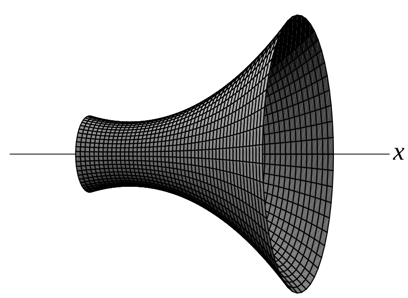
$$A(x) = \frac{\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2}{2} = \frac{(a^2 - x^2)}{2}.$$

Volumen klina je zato enak

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\left(a^2 x - x^3/3\right)_{-a}^{a} = 2a^3/3.$$

■

Prostornina rotacijskega telesa Naj bo f zvezna in nenegativna funkcija na intervalu $[a, b]$. Če zavrtimo krivuljo $y = f(x)$ okoli abscisne osi, opiše *rotacijsko ploskev.* Ta ploskev in ravnini, ki v točkah $x = a$ in $x = b$ stojita pravokotno na abscisno os, omejujejo *rotacijsko telo* (slika 6.19).



Slika 6.19: Rotacijsko telo

Ker je ploščina pravokotnega prereza rotacijskega telesa enaka

$$A(x) = \pi(f(x))^2,$$

zato je njegov volumen

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx. \tag{6.10}$$

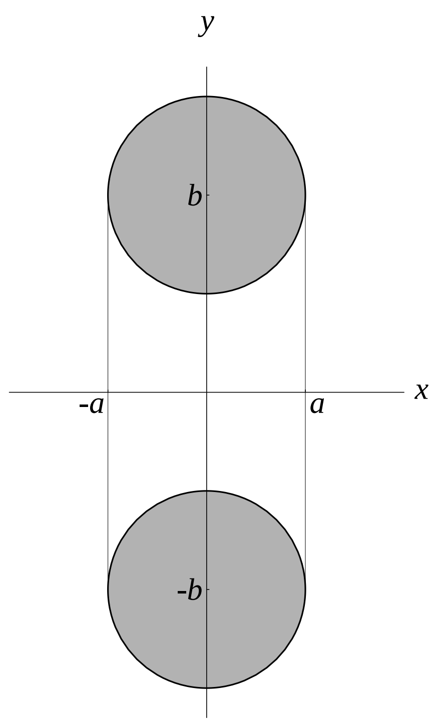
Primer 6.2.7.

1. Izračunajmo prostornino krogle s polmerom a.

   Krogla nastane, ko se okrog osi x zavrti krog $x^2 + y^2 \leq a^2$. Volumen krogle je

   $$V = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

2. Izračunajmo prostornino torusa (slika 6.20), ki nastane, ko krog z radijem a in središčem v točki (a, b), kjer je $a < b$, zavrtimo okoli osi x.



Slika 6.20: Presek torusa

Krožnico lahko obravnavamo kot graf dveh funkcij:

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Prostornina torusa je razlika prostornine telesa, ki ga ob vrtenju opiše zgornja veja, in prostornine telesa, ki ga opiše spodnja veja, torej

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} \left[(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2 \right] dx \\ &= 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx == 4\pi a^2 b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

■

Če je krivulja dana parametrično z enačbama $x = x(t)$, $y = y(t)$, kjer je $t \in [\alpha, \beta]$, je

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) \dot{x}(t)\, dt. \tag{6.11}$$

Primer 6.2.8. Prostornina vrtavke, ki jo dobimo, če asteroido

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

zavrtimo okrog osi x je

$$\begin{aligned} V &= 3\pi a^3 \int_{\pi}^{0} \sin^6 t \cos^2 t (-\sin t)\, dt \\ &= -3\pi a^3 \int_{0}^{\pi} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t\, d(\cos t) \\ &= -3\pi a^3 \int_{1}^{-1} (1 - u^2)^3 u^2\, du \\ &= 3\pi a^3 \int_{-1}^{1} (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8)\, du = \frac{32\pi a^3}{105}. \end{aligned}$$

■

Volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika pod krivuljo $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ okrog osi y, moramo izračunati drugače. Naj bo

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$$

delitev intervala $[a, b]$. Z vrtenjem pravokotnika z višino $f(x_i)$ nad intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ dobimo votel valj ali tanko valjno lupino, katere volumen je približno enak

$$\Delta V_i = 2\pi f(x_i) \frac{x_i + x_{i+1}}{2} (x_i - x_{i-1}) = 2\pi f(x_i) \bar{x}_i \delta_i,$$

kjer je $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2$ povprečna vrednost polmera, $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ pa debelina lupine. Z vrtenjem stopničastega lika, sestavljenega iz takšnih pravokotnikov, dobimo stopničasto telo, sestavljeno iz valjnih lupin, katerega volumen je

$$V_n = 2\pi \sum f(x_i) \bar{x}_i \delta_i.$$

Ker je to integralska vsota za funkcijo $2\pi f(x)x$, je iskani volumen enak

$$V = \lim_{n \to \infty} V_n = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx. \tag{6.12}$$

Primer 6.2.9. Izračunajmo prostornino telesa, ki nastane, če odsek sinusoide $y = \sin x$ med 0 in π zavrtimo okoli ordinatne osi.

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\, dx = 2\pi \left[-x \cos x\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \cos x\, dx = 2\pi^2.$$

■

Volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem krivulje

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta$$

okrog neke splošne osi

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t$$

je enak

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (\rho(t))^2\, dl,$$

kjer je $\rho(t)$ oddaljenost točke na krivulji od osi vrtenja, $dl = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ pa je diferencial loka na osi vrtenja.

6.2.4 Površina rotacijskega telesa

Izračunajmo površino plašča rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ okrog osi x.

Funkcija f naj bo zvezno odvedljiva. Če izberemo delitev intervala

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b,$$

je telo, ki ga pri vrtenju opiše lomljena daljica, ki povezuje posamezne delilne točke na krivulji, sestavljeno iz prisekanih stožcev. Daljica med točkama T_{i-1} in T_i dolžine Δs_i pri tem opiše stožec s plaščem

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta s_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \delta_i.$$

Površina celega telesa je tako

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1} + f(x_i)\right) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \delta_i.$$

Če izberemo zaporedje delitev, kjer gredo vse dolžine $\delta_i \to 0$, je limita dobljenega zaporedja (P_n) enaka površini rotacijskega telesa:

$$P = \lim_{n \to \infty} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1} + f(x_i)\right) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \delta_i$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} (2f(\xi_i)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \delta_i = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \qquad (6.13)$$

Primer 6.2.10. Izračunajmo površino telesa, ki nastane, ko krivuljo $y = \operatorname{ch} x$ med $x = -1$ in $x = 2$ zavrtimo okoli abscisne osi.

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} \, dx = \operatorname{ch} x \, dx; \\
P &= 2\pi \int_{-1}^{2} \operatorname{ch}^2 x \, dx = 2\pi \int_{-1}^{2} \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} \, dx \\
&= \pi \left[x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \right]_{x=-1}^{x=2} = \pi \left(2 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 4 + 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 \right) \\
&= \frac{\pi}{2} (6 + \operatorname{sh} 4 + \operatorname{sh} 2).
\end{aligned}$$

■

Če je krivulja podana v parametrični obliki $x = x(t);\ y = y(t)$, je

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \qquad (6.14)$$

Primer 6.2.11. Kardioido $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, naj zavrtimo okoli abscisne osi. Izračunajmo površino dobljene rotacijske ploskve.

Ker je kvadrat diferenciala loka enak

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 16a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

je iskana površina

$$P = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} (2\sin t - \sin 2t) \sin \frac{t}{2}\, dt = \frac{128\pi a^2}{5}.$$

■

6.2.5 Momenti funkcije

Funkcija f naj bo na intervalu $[a, b]$ pozitivna in integrabilna. Integral oblike

$$M_n = \int_a^b x^n f(x)\, dx; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

imenujemo *n-ti moment funkcije*. Momenti M_n sestavljajo neko zaporedje števil, ki je s funkcijo enolično določeno. Velja tudi obratna trditev: dano zaporedje momentov M_n enolično določa funkcijo f.

Primer 6.2.12. Izračunajmo momente konstantne funkcije $f(x) = 1$ na intervalu $[a, b]$.

$$M_n = \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$

■

Oglejmo si fizikalno interpretacijo momentov. Naj bo na intervalu $[a, b]$ porazdeljena masa in naj bo vrednost funkcije $f(x)$ enaka gostoti mase v razdalji x od izhodišča (predstavljajmo si, da na abscisni osi leži palica, ki je neenakomerno debela). Potem imajo prvi trije momenti

$$m = \int_a^b f(x)\,dx, \quad M = \int_a^b xf(x)\,dx, \quad J = \int_a^b x^2 f(x)\,dx$$

fizikalen pomen. Prvi integral (m) je enak masi palice, saj je masa koščka palice z dolžino dx enaka $f(x)\,dx$. Drugi integral je statični moment M, tretji integral pa je vztrajnostni moment palice J.

Če statični moment M delimo z maso m, dobimo absciso x_0 težišča palice

$$mx_0 = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

Z drugačno interpretacijo momentov se bomo srečali pri verjetnostnem računu.

Literatura

[1] K. G. Binmore: *Mathematical Analysis (a straightforeward approach), 2 ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[2] C. H. Edwards Jr. in D. E. Penney: *Calculus and Analytic Geometry*, Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, 1990.

[3] R. Jamnik: *Matematika*, Partizanska knjiga, Ljubljana, 1981.

[4] P. Lax, S. Burstein in A. Lax: *Calculus with Applications and Computing, Vol I*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[5] N. Piskunov: *Differential and Integral Calculus, vol. I*, Mir Publishers, Moscow, 1974.

[6] N. Prijatelj: *Uvod v matematično analizo, 1. del*, DMFA, Ljubljana, 1980.

[7] G. B. Thomas, Jr: *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1972.

[8] I. Vidav: *Višja matematika I* (10. natis), DMFA, Ljubljana, 1990.