· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Predrok iz OME, 08.01.2020

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih $[\cdot]$ je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

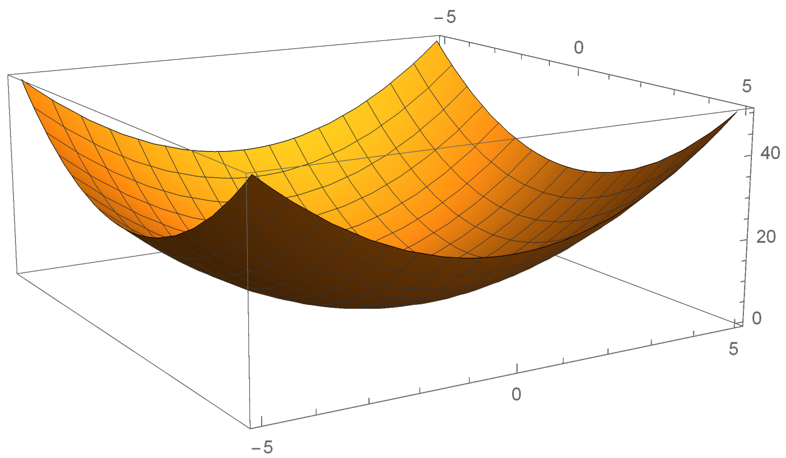
1. [**30 točk**]

(a) [**10**] Navedite eno operacijo na $\mathbb{C}$ in eno transformacijo kompleksne ravnine, za kateri je polarni zapis kompleksnega števila primernejši od karteziČnega. Za obe napišite tudi predpis v polarnem zapisu.

(b) [**10**] Izberite realne koeficiente $a_i \in \mathbb{R}$ v algebraični enačbi $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ tako, da vsaj ena rešitev te enačbe ne bo realna. Odgovor utemeljite.

(c) [**10**] Izberite realne koeficiente $a_i \in \mathbb{R}$ v algebraični enačbi $a_6z^6 + a_5z^5 + \ldots + a_1z + a_0 = 0$ stopnje 6 tako, da se množica rešitev ne spremeni, če vsako rešitev zarotiramo za kot $\frac{\pi}{6}$ v pozitivni smeri. Odgovor utemeljite.

2. [**30 točk**] Na naslednji sliki je graf zvezno odvedljive funkcije $f : (-5, 5) \times (-5, 5) \to \mathbb{R}$.



Opazimo, da ima funkcija f v definicijskem območju **natanko en** lokalni ekstrem (x_0, y_0).

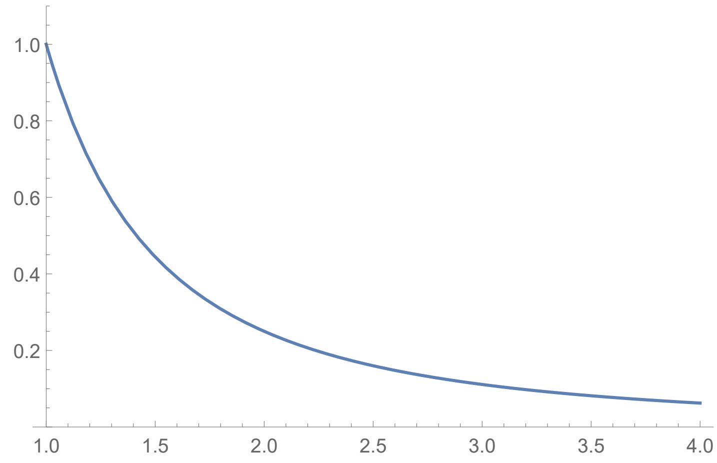
(a) [**5**] Kaj velja za odvoda $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$?

(b) [**10**] Napišite primer matrike, ki bi glede na podatke lahko bila Hessejeva matrika funkcije f v točki (x_0, y_0). Odgovor utemeljite.

(c) [**10**] Naj bo $g : (-5, 5) \times (-5, 5) \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija. Razložite, kako bi iskali kandidate za maksimalne in minimalne vrednosti funkcije f nad krivuljo, določeno z enačbo $g(x, y) = 6$.

(d) [**5**] Ali obstaja funkcija g v prejšnji točki, za katero bo kandidatov neskončno mnogo? Odgovor utemeljite.

3. [**35 točk**] Na naslednji sliki je graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$.



(a) [**8**] Izračunajte določeni integral $I_n := \int_1^n f(x)\,dx$ in $\lim_{n\to\infty} I_{2n}$.

(b) [**10**] Prerišite skico krivulje (skica ne rabi biti zelo natančna) in vrišite pravokotnike, ki ustrezajo Riemannovi vsoti funkcije $f(x)$ na intervalu $[1,4]$ pri izbiri delilnih točk $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ in vmesnih točk $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$.

(c) [**10**] Napišite Riemannovo vsoto R_n funkcije $f(x)$ pri izbiri delilnih točk $x_0 = 1, x_1 = 2, \ldots, x_{n-1} = n$ intervala $[1,n]$ in vmesnih točk $c_1 = 2, c_2 = 3, \ldots, c_{n-1} = n$. Če sklepate iz točke (3b), kaj lahko poveste o velikosti R_n v primerjavi z I_n?

(d) [**7**] Utemeljite, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ konvergentna.