Ime in priimek

| | |
|---|---|
| Vpisna številka | |

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| Σ | |

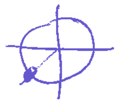
**Matematika: prvi izpit - računski del**

26. januar 2024

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskusi prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani. **Vse odgovore dobro utemeljite!**

## 1. naloga (25 točk)

**a) (10 točk)** Zapiši kompleksno število $z = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ v obliki $z = x + yi$ in izračunaj $z^4$.



$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ 1

$z = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ 1 1

$\underline{z = -1 - i}$ 1

$z^4 = (\sqrt{2})^4 \cdot e^{\frac{20\pi}{4}i}$ 1 1

$= 4 \cdot e^{5\pi i}$ 1

$= 4\left(\underbrace{\cos(5\pi)}_{=-1} + i\underbrace{\sin(5\pi)}_{=0}\right)$ 1 1

$\underline{z^4 = -4}$ 1

**b) (15 točk)** Reši enačbo $2\overline{z} = -iz^2$.

$z = x + yi$

$2(x - yi) = -i(x+yi)^2$

$2x - 2yi = -i(x^2 + 2xyi + y^2 \underbrace{i^2}_{=-1})$

$2x - 2yi = -x^2 i - 2xyi^2 + y^2 i$

$2x - 2yi = -x^2 i + 2xy + y^2 i$ 3

Re: $2x = 2xy \rightarrow y = 1$ 1 ALI $x = 0$ 1 2

Im: $-2y = -x^2 + y^2$

$y = 1 \rightarrow -2 = -x^2 + 1$ 1

$+3 = +x^2$

$x = \pm\sqrt{3}$ 2

$x = 0 \rightarrow -2y = y^2$ 1

$0 = y(2 + y)$

$y_1 = 0$

$y_2 = -2$ 2

$z_1 = \sqrt{3} + i$ 1

$z_2 = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = 0$ 1

$z_4 = -2i$

**2. naloga (25 točk)**

Naj bo podana funkcija s predpisom $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

**a) (10 točk)** Zapiši enačbo tangente na $f$ v točki $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x (x-2)}{x^4} = \frac{e^x (x-2)}{x^3} \quad 3$$

$$f'(1) = \frac{e \cdot (-1)}{1} = -e \quad 1$$

$$f(1) = \frac{e}{1} = e \quad 1$$

$$e = 1 \cdot -e + n$$
$$n = 2e \quad 2$$

$$y = -e \cdot x + 2e \quad 3$$

**b) (15 točk)** Določi definicijsko območje, stacionarne točke in območja naraščanja in padanja funkcije $f$.

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ 2

stac. točke: $f'(x) = 0$ 2 $x = 2$ $f(2) \overset{1}{=} \frac{e^2}{4}$ $T(2, \frac{e^2}{4})$ lok. minimum 3

predznak odvoda: 3

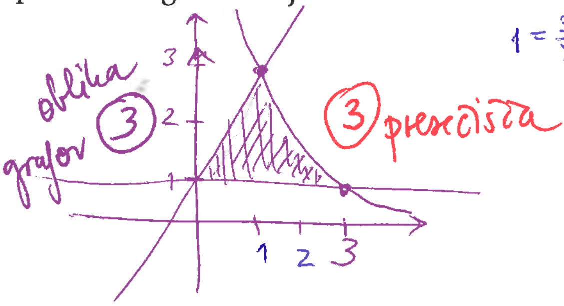
$$\begin{array}{ccccc} & + & \vdots & - & + \\ \hline & & 0 & & 2 \end{array}$$

naraščanje : $x \in (-\infty, 0), [2, \infty)$ 2

padanje : $x \in (0, 2]$ 2

**3. naloga** (25 točk)

**a)** (20 točk) Skiciraj območje, ki ga omejujejo $y = 1$, $y = 2x + 1$ in $y = \frac{3}{x}$. Izračunaj ploščino tega območja.




$1 = \frac{3}{x} \quad x = 3$

$$S = \int_0^1 (2x+1-1)\,dx + \int_1^3 \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx \quad (5)$$

$$= \int_0^1 2x\,dx + \int_1^3 \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \ (1) + \left(3 \log|x| - x\right) \Big|_1^3 \ (2)$$

$$= 1 - 0 + (3\log 3 - 3) - (3 \log 1 - 1) \quad (3)$$

$$= 1 + 3\log 3 - 3 + 1 \quad (2)$$

$$= \underline{3 \log 3 - 1} \quad (1)$$

**b)** (5 točk) Poišči kakšno funkcijo, katere odvod je enak $\cos^2 x \sin x$.

$$f'(x) = \cos^2 x \sin x$$

$$f(x) = \int \cos^2 x \sin x \, dx \quad (1) \qquad t = \cos x \quad (1)$$

$$dt = -\sin x \, dx$$

$$= \int t^2 \cdot \cancel{\sin x} \cdot \frac{-dt}{\cancel{\sin x}} \qquad -\frac{dt}{\sin x} = dx$$

$$= -\frac{1}{3} t^3 + C \quad (1)$$

$$= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C \quad (1)$$

Recimo: $\underline{f(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + 1}$ (1)

**4. naloga (25 točk)**

Reši sistem enačb.

$$\begin{aligned} x + 3y - z + 3w &= -5 \\ y + z + 2w &= -1 \\ x + 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & -5 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 2 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 3 & -5 \\ \boxed{0} & & & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 1 & -4 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3 3

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ 4

$w = t$
1

$x + w = \cancel{14}\ -18 \qquad x = -18 - w$ 2

$y + w = 3 \qquad y = 3 - w$ 2

$z + w = -4 \qquad z = -4 - w$ 2

rešitev: $(\cancel{\ \ } -18-t,\ 3-t,\ -4-t,\ t)$ 3

teR