1. izpit iz Matematičnega modeliranja

16. 6. 2014

1. Podana je ploskev $\vec{r}(u,v) = (u+v, u-v, uv)$. Zapišite

   5 (a) koordinate točke $\vec{r}(1,1)$ na ploskvi,

   5 (b) koordinatni krivulji skozi točko $\vec{r}(1,1)$,

   5 (c) vektor v smeri normale na ploskev v tej točki,

   5 (d) enačbo tangentne ravnine v tej točki.

   5 Kaj se bo zgodilo z z koordinato točke na ploskvi, če v točki $u=1, v=1$ vrednost parametra u čisto malo povečate? Bo zrasla, padla, ali ostala približno enaka?

a) $\vec{r}(1,1) = (2,0,1)$

b) $\vec{r}(1,v) = (1+v, 1-v, v)$

$\vec{r}(u,1) = (1+u, u-1, v)$

c) $\vec{r}_u = (1,1,v)$

$\vec{r}_v = (1,-1,u)$

$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (u+v, v-u, -2)$

$\vec{n}(1,1) = (2,0,-2)$

d) $2x + 0\cdot y - 2\cdot z = 2\cdot 2 + 0\cdot 0 - 2\cdot 1 = 2$

$2x - 2z = 2$

e) $\vec{r}_u = (1,1,v) \Rightarrow \vec{r}_u(u=1, v=1) = (1,1,1) \Rightarrow$ vrednost bo zrasla.

2. Določite Moore-Penroseev inverz matrike

15

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10 in z njegovo pomočjo določite vse posplošene inverze matrike A.

a) $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, det $A^TA = 1$ $\Rightarrow$ A^TA je obrnljiva

$$\Rightarrow A^+ = (A^TA)^{-1}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Ker je A^+ posplošeni inverz matrike A, so vsi posplošeni inverzi enaki

$$G = \underbrace{A^+AA^+}_{=A^+} + W - A^+AWAA^+ = A^+ + W - A^+AWAA^+,$$

saj A^+ M.P.inverz

kjer je $W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & W_{24} \end{bmatrix}$ poljubna matrika.

$$A^+A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_{11} & \cdot & \cdot & W_{14} \\ W_{21} & \cdot & \cdot & W_{24} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & 0 & W_{14} \\ 0 & W_{22} & 0 & W_{24} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} W_{11} & 0 & W_{13} & 1 \\ W_{21} & -1 & W_{23} & 1 \end{bmatrix}, \quad W_{11}, W_{13}, W_{21}, W_{23} \in \mathbb{R}.$$

3. Vsako od dveh stikal je na posamezen dan vključeno ali izključeno. Dne n je vsako stikalo vključeno z verjetnostjo

$$\frac{1 + \text{število vključenih stikal dne } (n-1)}{4},$$

neodvisno od drugega stikala.

Naj bo X_1, X_2,... markovska veriga s stanji s_0, s_1 in s_2, kjer stanje s_i pomeni i vključenih stikal.

15 (a) Zapišite matriko prehodov stanj markovske verige, ki je določena s številom vključenih stikal.

10 (b) Koliko je verjetnost, da bo po zelo zelo dolgem času prižgano natanko eno stikalo?

a) s_0, $X_n = 0$ $\quad P(\text{stikalo vključeno}) = \frac{1+0}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X_{n+1}=0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$P(X_{n+1}=1) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$

$P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

s_1, $X_n = 1$ $\quad P(\text{stikalo vključeno}) = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X_{n+1}=0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(X_{n+1}=1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

s_2, $X_n = 2$ $\quad P(\text{stikalo vključeno}) = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

$P(X_{n+1}=0) = \frac{1}{16}$

$P(X_{n+1}=1) = \frac{6}{16}$

$P(X_{n+1}=2) = \frac{9}{16}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

b) $$P^T = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{6}{16} & \frac{1}{2} & \frac{6}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

$$P^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\frac{9}{16}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{16}z = x \qquad / \cdot 16$$

$$\frac{6}{16}x + \frac{1}{2}y + \frac{6}{16}z = y \qquad / \cdot 16$$

$$\frac{1}{16}x + \frac{1}{4}y + \frac{9}{16}z = z \qquad / \cdot 16$$

$$\left.\begin{aligned} -7x + 4y + z &= 0 \\ 6x - 8y + 6z &= 0 \\ x + 4y - 7z &= 0 \end{aligned}\right] -$$

$$8x - 8z = 0 \Rightarrow z = x$$

$$12x - 8y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$1 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow e = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix} \rightarrow p = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$$

4. Iščemo rešitev začetnega problema

$$x'' + 5x' + 4x = 0; \quad x(0) = 3 \quad \text{in} \quad x'(0) = -5.$$

5 (a) Diferencialno enačbo zapišite kot sistem diferencialnih enačb prvega reda. Zapišite tudi ustrezne začetne pogoje.

20 (b) Poiščite rešitev problema.

a) $x' = u$ $\qquad x(0)=3$

$u' + 5u + 4x = 0$ $\qquad u(0) = -5$

b) $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

$(\lambda+4)(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = -4$

$\lambda_2 = -1$

$x(t) = Ae^{-4t} + Be^{-t}$

$x'(t) = -4Ae^{-4t} - Be^{-t}$

$x(0) = 3 = A + B$

$x'(0) = -5 = -4A - B$ $\Big] +$

$-2 = -3A$

$A = \frac{2}{3}$

$B = \frac{7}{3}$

$x(t) = \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{7}{3}e^{-t}$