Amortizirana analiza

Tomaž Dobravec, Algoritmi in podatkovne strukture 2

Amortizirana analiza

- Amortizirana analiza – pristop k ocenjevanju zahtevnosti algoritmov in podatkovnih struktur.

- Pogosto se zgodi, da je "worst-case" analiza (po krivici) preveč pesimistična.

- Amortizirano analizo uporabljamo za ocenjevanje zahtevnosti postopkov (bodisi algoritma bodisi operacij v podatkovnih strukturah)

- Amortizirana analiza **ne ocenjuje posameznih operacij** postopka, rezultat analize je ocena **celote**!
  - čeprav so nekatere operacije postopka morda počasne, obstajajo tudi druge, ki so hitre;
  - počasne in hitre operacije postopka skupaj v povprečju morda niti niso tako slabe.

- Amortizirana analiza skuša ceno dragih operacij postopka enakomerno porazdeliti med poceni operacije.

- Amortizirana analize ocenjuje zaporedje **n** operacij nekega postopka.
- Recimo, da imamo končen nabor operacij $O=\{o_1, o_2, \ldots, o_k\}$. Zahtevnost operacije $o \in O$ označimo s T_o.

  - Worst case analiza
  - Verjetnostna analiza
  - Amortizirana analiza

Worst case in verjetnostna analiza

Amortizirana analiza

Vrste amortizirane analize in primeri

- Amortizirano analizo lahko izvajamo na več načinov, najpogosteje z uporabo ene izmed naslednjih metod:
  - Metoda vsote (aggregate method)
  - Metoda kopičenja - bankirski pristop (accounting method)
  - Metoda potenciala - fizikalni pristop (potential method)

- Prikaz delovanja posamezne metode bomo izvedli na dveh primerih:
  - Dvojiški števec
    `k`-bitno polje `A[0,1,…,k-1]`, vrednost števca: $x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i] \cdot 2^i$
    operacija `povecaj()` števec poveča za 1
  - Razširjen sklad
    `push(S,x)`
    `pop(S)`
    `pop(S,k)`

Dvojiški števec

Razširjen sklad

Amortizirana analiza - metoda vsote

✧ Clij : na konkretnem primeru in za konkretno funkcijo `T(n)` pokažemo, da je za vsak `n` cena zaporedja `n` operacij v najslabšem primeru enaka `T(n)`.

✧ V najslabšem primeru je potem povprečna cena (amortizirana cena) posamezne operacije T(n)/n.

✧ Pri tej metodi se amortizirana cena nanaša na **VSE operacije** (vse imajo enako povprečno ceno); ne razlikujemo med različnimi operacijami (ena je dražja, druga cenejša).

✧ **Povzetek: z metodo vsote seštejemo prispevke VSEH operacij in jih delimo z n.**

Metoda vsote – primer (razširjen sklad)

Metoda vsote – primer (dvojiški števec)

Amortizirana analiza - metoda kopičenja

- Metoda kopičenja “obiskuje” operacije po vrsti od prve proti zadnji (n-ti).
- Vsaki obiskani operaciji metoda ”zaračuna” njen obstoj v zaporedju.
- Cena, ki jo mora operacija plačati, se imenuje ”amortizirana cena” .
- Amortizirana cena operacije je lahko višja ali nižja od realne cene operacije.

razlika se krije iz kredita prejšnjih operacij

razlika se shrani (**kredit)**

- Amortizirane cene posameznih operacij pri tej metodi se med seboj lahko razlikujejo.
- Pomembno: za vsa zaporedja dolžine n mora veljati $$\sum_{i=1}^{n} c_i \leq \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i$$

c_i označuje realno ceno i-te operacije, $\hat{c}_i$ pa njeno amortiziramo ceno

Metoda kopičenja – primer (razširjen sklad)

Metoda kopičenja – primer (dvojiški števec)

- Cilj: vsota amortiziranih cen zaporedja operacij je zgornja meja za vsoto realnih cen.
- Ne beležimo kredita posamezne operacije ampak le skupen kredit (potencial) celotne podatkovne strukture.
- Oznake: začetno stanje podatkovne strukture: D_o, stanje po i-ti operaciji: D_i. Realna cena i-te operacije c_i.
- Funkcija Φ – potencial (realno število) podatkovne strukture.
  $\Phi(D_i)$ … potencial podatkovne strukture po i-ti operaciji.
- Amortizirana cena i-te operacije $\hat{c}_i$ je definirana z $\hat{c}_i =$
- Amortizirana cena za zaporedje n operacij je zato:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i =$$

- Če je funkcija potenciala definirana tako, da je $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_o)$, potem je **amortizirana cena zaporedja** zgornja meja za worst-case realne cene zaporedja.

- Ker v praksi ne vemo, koliko operacij bo v zaporedju, je praktična zahteva še $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_o)$ za vsak i; v tem primeru namreč vemo, da smo vedno plačali dovolj za naslednjo operacijo.

- Čeprav je amortizirana cena odvisna od izbire funkcije Φ, je ob upoštevanju zgornjih zahtev vedno ZGORNJA meja za realno ceno zaporedja; ob smiselni in premišljeno izbrani funkciji potenciala, se zgornja meja lahko približa tesni meji.

Povzetek: za poljubno realno funkcijo Φ, ki določa "potencial" podatkovne strukture, in za katero velja $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_o)$ za vsak i, lahko izračunamo amortizirane cene za posamezne operacije. Če smo imeli pri izbiri funkcije Φ "srečo", bodo tako naračunane amortizirane cene in njihova najslabša vsota prinesli pametno oceno za zgornjo mejo.

Metoda potenciala– primer (razširjen sklad)

Metoda potenciala– primer (dvojiški števec)