Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: 2. kolokvij

25. maj 2020

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Preslikava $\phi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je podana s predpisom

$$\phi(X) = AX + X\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T},$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) (4) Preveri, da je ϕ linearna.

Rešitev: Preveriti moramo, da je ϕ aditivna in homogena:

$$\begin{aligned} \phi(X+Y) &= A(X+Y) + (X+Y)\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T} = AX + AY + X\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T} + Y\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T} = \\ &= AX + X\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T} + AY + Y\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T} = \phi(X) + \phi(Y), \\ \phi(\alpha X) &= A(\alpha X) + (\alpha X)\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T} = \alpha(AX) + \alpha(X\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T}) = \\ &= \alpha(AX + X\vec{a}\vec{a}^\mathsf{T}) = \alpha\phi(X). \end{aligned}$$

b) (16) Poišči matriko M, ki pripada preslikavi ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Rešitev: Standardno bazo $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sestavljajo matrike E_{ij} za $i,j \in \{1,2\}$. Izračunajmo najprej v splošnem

$$\begin{aligned} \phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c-a & d-b \\ a-c & b-d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-b & b-a \\ c-d & d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pri E_{11} je $a = 1$ in $b = c = d = 0$, zato je

$$\phi(E_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -E_{12} + E_{21} = C_1.$$

Podobno dobimo še $\phi(E_{12}) = -E_{11} + E_{22} = C_2$, $\phi(E_{21}) = E_{11} - E_{22} = -C_2$ in $\phi(E_{22}) = E_{12} - E_{21} = -C_1$. Tako je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) (5) Poišči bazi za $\ker(\phi)$ in $\operatorname{im}(\phi)$.

Rešitev: Iz zgornjega računa vidimo, da je $\operatorname{im}\phi = \mathcal{L}(\{C_1, C_2\})$. Če na M naredimo Gaussovo eliminacijo po vrsticah, dobimo

$$M \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V $\ker\phi$ so torej matrike oblike $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, zato lahko za bazo vzamemo $N_1 = E_{11} + E_{22}$ in $N_2 = E_{12} + E_{21}$.

2. naloga (25 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) (10) Izračunaj determinanti matrik A in B.
Rešitev: Opazimo tole: Če v A zamenjamo vrstici 1 in 2 ter zamenjamo vrstici 3 in 4, dobimo matriko B. Vsaka zamenjava vrstic determinanto pomnoži z -1, torej je $\det(A) = (-1)^2 \det(B) = \det(B)$. Determinanto matrike A izračunajmo s kofaktorsko formulo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

Imamo torej $\det(A) = \det(B) = 4$.

b) (10) Izračunaj determinante matrik $A+B$, $A-B$, AB in AB^{-1}.
Rešitev: Iz formul $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ in $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$ takoj dobimo

$$\det(AB) = 4 \cdot 4 = 16 \quad \text{ter} \quad \det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = \frac{4}{4} = 1.$$

Za prvi dve determinanti najprej zapišimo matriki $A+B$ ter $A-B$:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pri $A+B$ sta prvi dve vrstici enaki, pri $A-B$ pa sta prvi dve vrstici le nasprotno predznačeni. Obe matriki imata torej linearno odvisne vrstice, kar pomeni $\det(A+B) = \det(A-B) = 0$.

c) (5) Koliko naj bo t, da bo veljalo $\det(tA) = 1$? Ali je za ta t matrika tA ortogonalna?
Rešitev: Ker je $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, je $\det(tA) = t^4 \det(A) = 4t^4$. Enakost $\det(tA) = 1$ bo torej veljala le, če je $4t^4 = 1$. Ta enačba ima rešitvi $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. V tem primeru je

$$tA = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ta matrika pa je ortogonalna, saj so njeni stolpci paroma pravokotni in dolžine 1.

3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a) (12) Določi ortonormirano bazo za $V = C(A)$.
Rešitev: Na stolpcih $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ matrike A uporabimo Gram-Schmidtov postopek.

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{a}_1 = [1,2,2,0]^\mathsf{T} \\ \vec{v}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = [2,-1,0,2]^\mathsf{T} \\ \vec{v}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\vec{v}_2 = [-2,0,1,2]^\mathsf{T} \end{aligned}$$

Za ortonormirano bazo $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3\}$ vektorje samo še normiramo

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

b) (8) Določi ortnormirano bazo za $V^\perp$.
Rešitev: Uporabimo Gaussovo eliminacijo na matriki A^T (ali matriki Q^T, kjer je $Q = [\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3]$), da določimo bazo za $V^\mathsf{T} = C(A)^\perp = N(A^\mathsf{T})$.

$$A^\mathsf{T} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vsi ničelni vektorji so vzporedni $\vec{v}_4 = [0,2,-2,1]^\mathsf{T}$. Za ortornormiramo bazo V^T lahko tako vzamemo vektor

$$\vec{q}_4 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) (5) Izračunaj orotogonalno projekcijo vektorja $\vec{v} = [2,3,-3,-3]^\mathsf{T}$ na V.
Rešitev: Najhitrejši način je, da od $\vec{v}$ odštejemo projekcijo $\vec{v}$ na V^T.

$$\mathrm{proj}_V \vec{v} = \vec{v} - \mathrm{proj}_{V^\mathsf{T}}\vec{v} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{q}_4)\vec{q}_4 = [2,1,-1,-4]^\mathsf{T}$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (8) Določi vse lastne vrednosti matrike A.

Rešitev: Izračunamo karakterističin polinom

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -4 \\ 2 & 2-\lambda & -4 \\ 4 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -4 \\ 1+\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4-\lambda & -4 \\ 1+\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(1+\lambda)\left(-4\lambda + \lambda^2 + 4\right) = (-1-\lambda)(2-\lambda)^2,
\end{aligned}$$

od koder preberemo lastne vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 2$.

b) (8) Ali je A možno diagonalizirati?

Rešitev: Vprašanje je, ali je dimenzija lastnega podprostora za dvojno lastno vrednost $\lambda_{2,3} = 2$ enaka 2. Po Gaussovi eliminaciji na $A - 2I$ dobimo

$$A - 2I \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vidimo, da imamo samo eno prosto spremenljivko, kar pomeni, da je $\dim(N(A - 2I)) = 1$. Matrike A torej ni mogoče diagonalizirati.

c) (9) Naj bo $\vec{v}$ tisti lastni vektor za najmanjšo lastno vrednost matrike A, ki ima z-koordinato enako 2. Izračunaj

$$(A^7 + A^{-7})v$$

Rešitev: Najmanjša lastna vrednost matrike A je $\lambda_1 = -1$. Najprej je potrebno določiti ustrezni lastni vektor $\vec{v}$, kar naredimo z Gaussovo eliminacijo na $A + I$.

$$A + I \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Če za z-koordinato vzamemo $z = 2$, dobimo lastni vektor $\vec{v} = [1, 2, 2]^{\mathsf{T}}$. Glede na to, da je $\vec{v}$ lastni vektor matrike A za lastno vrednostjo $\lambda_1 = -1$, imamo

$$(A^7 + A^{-7})\vec{v} = ((-1)^7 + (-1)^{-7})\vec{v} = -2\vec{v} = [-2, -4, -4]^{\mathsf{T}}$$