Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Linearna algebra: 1. računski izpit

3. junij 2020

Čas pisanja: 70 minut. Dovoljena je uporaba enega lista velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (15 točk)

Dani sta premici

$$\begin{aligned} p_1 &: \quad x-3 = y = \frac{z-7}{2} \\ p_2 &: \quad 2-x = \frac{y+4}{2} = z-2 \end{aligned}$$

a) (6) Poiščite presečišče premic p_1 in p_2.
Rešitev: Koordinate presečišča (če obstaja) mora zadoščati vsem štirim zgornjim enačbam. ....(3 točke)
Reševanja se lahko lotimo na več načinov, dobimo pa $P(1,-2,3)$. Direktno lahko preverimo, da rešitev res zadošča vsem enačbam. ....(3 točke)

b) (4) Izračunajte kot med premicama p_1 in p_2.
Rešitev: Kot med premicama je kot med smernima vektorjema.

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \vec{p}_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

..........(2 točki)
Izračunamo kosinus kota

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{\|\vec{p}_1\| \|\vec{p}_2\|} = \frac{3}{6}$$

Kot med premicama je torej $\pi/3$. ....(2 točki)

c) (5) Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje premici p_1 in p_2.
Rešitev: Potrebujemo normalo $\vec{n}$ na ravnino. Ker ravnina vsebuje obe premici, mora biti $\vec{n}$ pravokoten na smerna vektorja $\vec{p}_1$ in $\vec{p}_2$. Ena izbira je vektorski produkt

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Lahko si tudi izberemo katerikoli neničelni večkratnik tega vektorja, na primer $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
..........(3 točke)
Za točko na ravnini lahko vzamemo katerokoli točko na premicah p_1 ali p_2. Lahko izberemo presečišče P, ki smo ga izračunali, in zapišemo enačbo ravnine

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_P$$

Dobimo

$$x + y - z = -4$$

..........(2 točki)

2. naloga (17 točk)

Dana sta matrika A in vektor $\vec{b}$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) (12) Ali je sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ rešljiv? Če je, poišči vse rešitve $\vec{x}$ tega sistema, če ni, poišči tisti $\vec{x}$, za katerega je norma $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ najmanjša možna.

Rešitev: Naredimo Gaussovo eliminacijo na $[A|\vec{b}]$:

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

V tretji vrstici vidimo, da je sistem protisloven, torej $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitev. .... (3 točke)

Vektor $\vec{x}$, za katerega je norma $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ najmanjša možna, je rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ v smislu linearne matode najmanjših kvadratov – to je ravno rešitev normalnega sistema $A^{\mathsf{T}}A\vec{x} = A^{\mathsf{T}}\vec{b}$. .... (3 točke)

Izračunajmo $A^{\mathsf{T}}A$ in $A^{\mathsf{T}}\vec{b}$:

$$A^{\mathsf{T}}A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^{\mathsf{T}}\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

.... (3 točke)

Gaussova eliminacija na $[A^{\mathsf{T}}A|A^{\mathsf{T}}\vec{b}]$ vrne

$$[A^{\mathsf{T}}A|A^{\mathsf{T}}\vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

torej je $\vec{x} = [\frac{1}{2}, 0]^{\mathsf{T}}$. .... (3 točke)

b) (5) Poiščite pravokotno projekcijo vektorja $\vec{b}$ na stolpčni prostor $C(A)$ matrike A.

Rešitev: Pravokotna projekcija $\vec{b}$ na $C(A)$ je točno $A\vec{x}$, kjer je $\vec{x}$ rešitev zgornjega normalnega sistema. .... (3 točke)

Torej

$$\mathrm{proj}_{C(A)}\vec{b} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

.... (2 točki)

3. naloga (18 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 6 & 8 & -6 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) (6) Določite vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.
Rešitev: Najprej izračunamo

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 3 \\ 6 & 8-\lambda & -6 \\ 6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)^2\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+1). \end{aligned}$$

Lastni vrednosti sta torej $\lambda_{1,2} = 2$ in $\lambda_3 = -1$.

..........(2+1 = 3 točke)

Ker je

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 6 & 6 & -6 \\ 6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

so lastni vektorji za lastno vrednost 2 oblike $[-y+z, y, z]^{\mathsf{T}}$. Izberimo

$$v_1 = [-1, 1, 0]^{\mathsf{T}} \quad \text{in} \quad v_2 = [1, 0, 1]^{\mathsf{T}}.$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 6 & 9 & -6 \\ 6 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

so lastni vektorji za lastno vrednost -1 oblike $[-\frac{1}{2}z, z, z]^{\mathsf{T}}$. Izberimo $v_3 = [-1, 2, 2]^{\mathsf{T}}$.

..........(2+1 = 3 točke)

b) (5) Ali je matriko A možno diagonalizirati? Če je diagonalizabilna, poiščite P in D (P^{-1} ni potrebno računati), sicer pa utemeljite, zakaj ni.
Rešitev:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

..........(2+3 = 5 točk)

c) (7) Naj bo $\vec{v}$ tisti lastni vektor za najmanjšo lastno vrednost matrike A, ki ima prvo komponento enako 1. Izračunajte

$$(A^7 - 4A^{-2})\vec{v}.$$

Rešitev: Najmanjša lastna vrednost je $\lambda_3 = -1$, iskani vektor pa $\vec{v} = [1, -2, -2]^{\mathsf{T}}$. Ker je $\vec{v}$ lastni vektor za lastno vrednost -1, je

$$A\vec{v} = -\vec{v}, \quad A^7\vec{v} = (-1)^7\vec{v} \quad \text{in} \quad A^{-2}\vec{v} = (-1)^{-2}\vec{v}.$$

..........(3 točke)

Zato je

$$(A^7 - 4A^{-2})\vec{v} = A^7\vec{v} - 4A^{-2}\vec{v} = (-1)^7\vec{v} - 4(-1)^{-2}\vec{v} = -\vec{v} - 4\vec{v} = -5\vec{v} = [-5, 10, 10]^{\mathsf{T}}.$$

..........(4 točke)