1. Naj bo $\mathbf{a} = [1,1,1]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$. Katere od spodaj naštetih množic so in katere niso vektorski podprostori v $\mathbb{R}^3$? V vsakem od podprostorov poišči vsaj eno neprazno linearno neodvisno podmnožico vektorjev, tj. bazo tega vektorskega podprostora!

   ☑ $U_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = 0\}$,

   ☒ $U_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = 1\}$,

   ☒ $U_3 = \{\mathbf{x} = [1, x_2, x_3]^\mathsf{T}\}$,

   ☑ $U_4 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, 2x_1 - x_2]^\mathsf{T}\}$,

   ☑ $U_5 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T} : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

   ☒ $U_6 = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T} : x_1 x_2 x_3 = 0\}$,

   ☑ $U_7 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}\}$.

2. Naj bo A $n\times m$ matrika.

   (a) Označimo z $N(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ množico vseh rešitev linearnega sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tj. $N(A) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Preveri, da je $N(A)$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^m$. Pravimo mu *ničelni prostor matrike A.*

   (b) Označimo s $C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ podmnožico vseh linearnih kombinacij stolpcev matrike A. Preveri, da je $C(A)$ vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Pravimo mu *stolpčni prostor matrike A.*

   (c) Konkretno naj bo
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Poišči bazi za $N(A)$ in $C(A)$.

   Rešitev: ... le (c) del:
   $$\mathcal{B}_{N(A)} = \{[1,0,0,0,-1]^\mathsf{T}, [0,1,0,-1,0]^\mathsf{T}\},$$
   $$\mathcal{B}_{C(A)} = \{[1,3,3,3,1]^\mathsf{T}, [3,1,3,1,3]^\mathsf{T}, [3,3,1,3,3]^\mathsf{T}\}.$$

3. Naj bo $W \leq \mathbb{R}^4$ vektorski podprostor vseh vektorjev $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^\mathsf{T}$, za katere velja $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

   (a) Preveri, da sta vektorja $\mathbf{u} = [1,1,0,0]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{v} = [1,1,3,3]^\mathsf{T}$ vsebovana v W.

   (b) Dopolni množico $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ do baze za W (če je to potrebno).

   (c) Poišči matriki A in B, da bo $W = C(A) = N(B)$.

   (d) Ali obstaja 4×4 matrika A, da je $W = C(A) = N(A)$?

   Rešitev: (b) Dodamo npr. $\mathbf{w} = [1,0,0,1]^\mathsf{T}$. (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = [1,-1,1,-1]$. (d) Ne.