1. Poišči splošne rešitve spodnjih linearnih diferencialnih enačb in pripadajočih začetnih problemov.

   (a) $xy' + y = 3x^2 - 2x + 1$, $y(1) = 1$,

   (b) $y' + y = x + 1$, $y(0) = 2$,

   (c) $\sin(x)y' + y = 1$, $y(\pi/2) = 2$,

   (d) $y' + y/x = \cos(x)$, $y(\pi) = 0$,

   (e) $xy' + y = -\sin(x)$, $y(\pi) = 0$,

   (f) $y' - 2xy = 2x$, $y(1) = 0$.

2. **Ortogonalne trajektorije.** Naj bo $f(x,y,c)$ funkcija treh spremenljivk. Spremenljivki x in y gledamo kot običajni kartezični koordinati točke v ravnini, spremenljivko c pa kot parameter. Enačba $f(x,y,c) = 0$ podaja družino krivulj v ravnini. (Pri vsakem parametru c dobimo po eno nivojnico funkcije dveh spremenljivk.) Pri dani družini krivulj bomo poiskali družino *ortogonalnih trajektorij* na te krivulje – novo družino krivulj, v kateri vsaka krivulja seka krivulje iz prve družine pod pravim kotom. Kako? Poiščemo diferencialno enačbo prvega reda, katere splošna rešitev se izrazi z enačbo $f(x,y,c) = 0$, nato pa v tej diferencialni enačbi y' zamenjamo z $-1/y'$.

   Poišči ortogonalne družine krivulj k spodnjim družinam. (Rezultat lahko pustiš v implicitni obliki.)

   (a) $y = x^2 + a$ za $a \in \mathbb{R}$,

   (b) $y = \dfrac{a}{x}$ za $a \in \mathbb{R}$,

   (c) $y = ax^2$ za $a \in \mathbb{R}$,

   (d) $y = ax^n$ za $a \in \mathbb{R}$ in (fiksen) $n \in \mathbb{N}$,

   (e) $(x+y)^2 = ax^2$ za $a \in \mathbb{R}$,

   (f) $x^2 + y^2 = r^2$ za $r \in \mathbb{R}$,

   (g) $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ za $r \in \mathbb{R}$.

3. Dana je diferencialna enačba

$$2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)y' = 0$$

   z začetnim pogojem $y(0) = -3$.

   (a) Zapiši funkciji $P(x,y)$ in $Q(x,y)$, da bo $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ ravno zgornja diferencialna enačba.

   (b) Preveri, da velja $P_y = Q_x$.

   (c) Poišči funkcijo $f(x,y)$, da bo veljalo $P = f_x$ in $Q = f_y$.

   (d) Reši zgornjo diferencialno enačbo.

4. Za $\mathbf{x} = [x,y]^\mathsf{T}$ poišči splošne rešitve sistemov diferencialnih enačb $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ za naslednje matrike:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   S pomočjo octave-a nariši fazne slike (tire rešitev za več različnih začetnih pogojev) za vsakega od zgornjih sistemov. Kako lastne vrednosti matrike A vplivajo na obnašanje rešitev?

5. Van der Pol-ov oscilator je dinamični sistem z nelinearnim dušenjem, ki zadošča diferencialni enačbi 2. reda

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

   (a) Zapiši to diferencialno enačbo 2. reda kot sistem diferencialnih enačb 1. reda (z uvedbo nove spremenljivke $y = \dot{x}$). Nariši fazno sliko tega sistema za $\mu = 1$ in nekaj izbranih začetnih pogojev.

   (b) Poišči stacionarne točke dobljenega sistema 1. reda in poračunaj lastne vrednosti Jacobijeve matrike desne strani v stacionarnih točkah. (Pomagaj si z octave-om.) Kaj ugotoviš?

   (c) Poišči začetni pogoj $[x(0), \dot{x}(0)]^{\mathsf{T}}$, za katerega je $y(0) = \dot{x}(0) = 0$, ki opisuje periodično rešitev tega sistema diferencialnih enačb, tj. poišči *limitni cikel* tega sistema. (Začni z $x(0) = x_0 > 0$ in $\dot{x}(0) = 0$, nato pa poišči x_1, pri katerem tir gibanja ponovno seka poltrak $x \geq 0, y = 0$. S tem je opisana funkcija $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $x_0 \mapsto x_1$. Poiskati moraš fiksno točko te funkcije, tj. rešiti enačbo $f(x) = x$.)