Vaje

Vektorji

1. Dan je pravilni šestkotnik $ABCDEF$. Označimo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Izrazi kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorje $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{DF}$.

2. Dan je trikotnik ABC. Označimo $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$. Naj bodo C', A' in B' razpolovišča stranic AB, BC in CA.

   (a) Izrazi z $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorje $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ in $\overrightarrow{CC'}$.

   (b) Izrazi vektorje $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ in $\overrightarrow{CC'}$ samo z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

   (c) Pokaži, da za poljubno točko O velja:
   $$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.$$

3. V štirikotniku $ABCD$ sta P in Q razpolovišči stranic AB in CD. Pokaži, da velja:
   $$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

4. V štirikotniku $ABCD$ sta E in F razpolovišči diagonal AC in BD. Pokaži, da velja:
   $$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

5. Dokaži, da se diagonali paralelograma razpolavljata.

6. Dan je paralelogram $ABCD$. Z E označimo razpolovišče daljice AB, z F pa razpolovišče daljice BC. Daljica DE preseka diagonalo AC v točki G, daljico DF pa v točki H. Pokaži, da je $AG = GH = HC$.

7. V trapezu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ in $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\vec{a}$. Označimo z S presečišče diagonal. Določi $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ in $\overrightarrow{AS}$ ter vrednost razmerja $AS : SC$.

8. V enakokrakem trapezu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$ in $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Naj bo E razpolovišče daljice BC, F razpolovišče daljice DC in S presečišče daljic AE in BF. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

9. Nekomplanarni vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ določajo paralelepiped. Ali se telesne diagonale sekajo?

10. Naj bo $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$ in $\vec{c} = (2, 0, 1)$. Izračunaj $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

11. Določi parameter t tako, da bosta vektorja $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ in $\vec{b} = t\vec{i} - \vec{j}$ linearno odvisna.

12. Naj bo $A(1, -2, 0)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-2, 0, 5)$. Točko D določimo tako, da je $ABCD$ paralelogram. Določi D in izračunaj dolžino diagonale BD.

13. Točke $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$ in $E(x, y, z)$ naj določajo enakostranično štiristrano piramido. Nožišče višine piramide označimo s H. Točka P na stranici EB naj bo nožišče višine trikotnika HEB. Določi točko P.

14. Naj bo $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 3)$ in $\vec{c} = (1, 0, -1)$. Izračunaj skalarne produkte $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{a}$ in $\vec{b}\vec{c}$.

15. Določi kote med naslednjimi pari vektorjev:

    (a) $(1, 0, 1)$ in $(1, 2, 1)$,

    (b) $(3, 0, 0)$ in $(1, 2, 2)$.

16. Določi dolžine stranic in kote trikotnika z oglišči $(0, 3, 4)$, $(3, 2, 3)$ in $(1, 4, 1)$.

17. Določi kot med enotskima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če sta vektorja $\vec{a} + 2\vec{b}$ in $5\vec{a} - 4\vec{b}$ pravokotna.